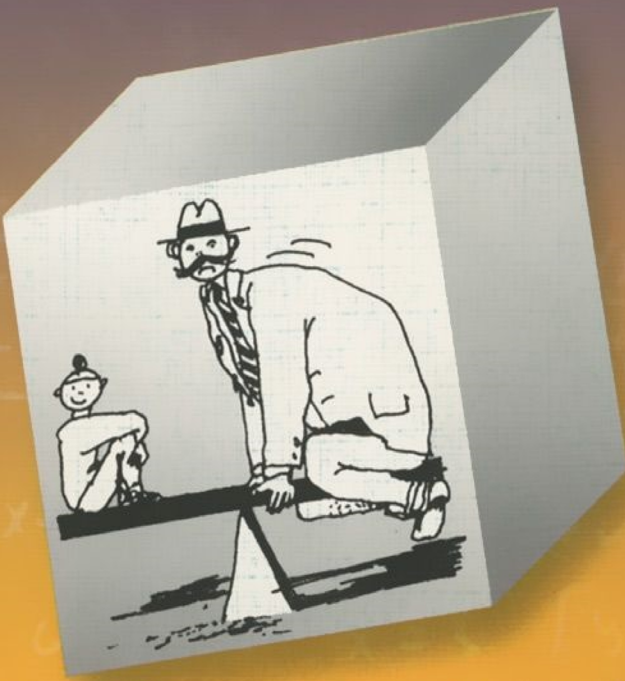
МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Дробно-рациональные неравенства



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Дробно-рациональные неравенства

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ, АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под общей редакцией заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива

VICTORY
ПЕТРОГЛИФ МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редакторы:
Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена, заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко, заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш, заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Дробно-рациональные неравенства. — 3-е изд., исправленное и дополненное — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2008. — 248 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-382-1, ISBN 978-5-98712-020-0, ISBN 978-5-91281-044-2.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-382-1 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-020-0 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-044-2 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

© Шахмейстер А.Х., 2008
© Куликов Ю.Н., обложка, 2008
© ООО «Петроглиф», 2008

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 8-11 классов (25 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 4	**Решение неравенств методом интервалов (стр. 5 – 30)** Практикум 1 (примеры по выбору учителя, с учетом возможностей учащихся). Тренировочная работа 1 (1, 4, 5, 10). Тренировочная работа 2 (5, 7, 8, 11).
5 – 7	**Системы неравенств (стр. 32 – 45)** Практикум 2. Тренировочная работа 3 (2, 6, 10).
8 – 10	**Нахождение области определения (стр. 46 – 52)** Практикум 3. Тренировочная работа 4 (2, 3, 6, 8).
11 – 12	**Решение более сложных неравенств (стр. 53 – 60)** Тренировочная работа 5 (2, 4, 9, 10).
13 – 16	**Модульные неравенства (стр. 61 – 91)** Практикум 4. Тренировочная работа 6 (1, 4, 8). Тренировочная работа 7 (1, 4, 6, 9).
17 – 25	**Различные неравенства (стр. 94 – 128)** Подготовительная карточка 1 (1, 3, 4, 6). Подготовительная карточка 2 (1, 3, 4). Подготовительная карточка 3 (3, 6). Подготовительная карточка 4 (1, 4, 5). Подготовительная карточка 5 (4, 6). Зачетная карточка 7 (2, 6). Зачетная карточка 8 (1, 6).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Решение неравенств методом интервалов

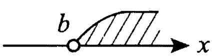
Обозначения

Введем обозначения промежутков:

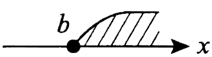
$a < x < b$ — запись $(a; b)$;

$a < x \leqslant b$ — запись $(a; b]$;

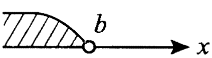
$a \leqslant x \leqslant b$ — запись $[a; b]$;



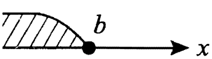
$x > b$ — запись $(b; +\infty)$;



$x \geqslant b$ — запись $[b; +\infty)$;

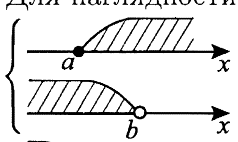


$x < b$ — запись $(-\infty; b)$;

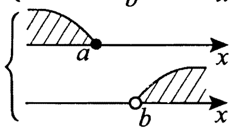


$x \leqslant b$ — запись $(-\infty; b]$.

Для наглядности автором используется обозначение:



$(-\infty; b) \cap [a; +\infty)$;



$(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$.

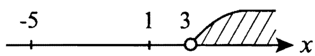
В чем заключается метод интервалов

Пусть $y = f(x)$ представлена в виде произведения каких-то сомножителей $f(x) = (x-3)(x+5)(x-1)$. Выясним, при каких значениях x функция имеет положительные значения, а при каких — отрицательные.

Для этого прежде всего выясним, когда $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -5, \\ x = 1. \end{array}\right.$

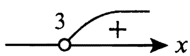
Обозначим на числовой оси корни[1] этой функции. Эти числа разбили числовую ось на несколько интервалов. Рассмотрим знаки функции на каждом из этих интервалов.

а) $x > 3$

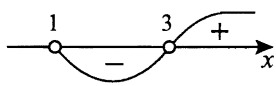


$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 5 > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x+5)(x-1) > 0.$$

Отсюда $f(x) > 0$, следовательно, на этом интервале знак значений функции $+$. $(f(3) = 0)$



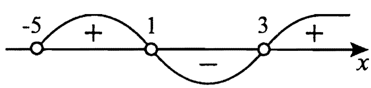
б) $1 < x < 3$



$$\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x - 1 > 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x-1)(x+5) < 0,$$

тогда $f(x) < 0$.

в) $-5 < x < 1$



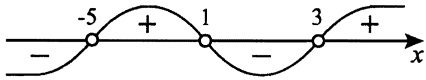
$$\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x - 1 < 0, \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x-1)(x-5) > 0,$$

тогда $f(x) > 0$.

[1] Под корнями функции будем понимать нули функции

Любопытно отметить, что при прохождении корней функции, функция поменяла знак на противоположный и в пункте б), и в пункте в).

г) $x < -5$



Тогда $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x - 1 < 0, \\ x + 5 < 0. \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0$

и знак функции снова изменился на противоположный.

Итак, простейшие наблюдения позволяют сделать вывод:

При прохождении корня функция меняет свой знак на противоположный.

Покажем, как, используя этот факт, можно довольно быстро и экономно решать довольно сложные неравенства.

Рассмотрим $f(x) = (x + 2{,}5)(x - 2)(x - 5)(x + 1)$.

Необходимо выяснить, например, когда $f(x) < 0$. Можно подробно рассмотреть каждый интервал и знак функции на нем, как это было сделано в предыдущем примере. Но можно иначе. Заметим, что все коэффициенты в этом разложении при x положительны (в данном случае равны 1). Это значит, что на самом правом интервале (т.е. больше большего корня) знак функции всегда положительный, и учитывая, что при прохождении корня функции, знаки функции меняются на противоположные, можно сформулировать (интуитивно понятное) мнемоническое правило.

Для решения неравенства необходимо:

а) разложить функцию на множители в каноническом виде (т.е. все коэффициенты при x должны быть положительными);

б) найти все корни функции и отметить их на числовой оси в порядке возрастания;

в) распределение знаков функции начинается всегда справа сверху (в виде змейки) и чередуется при прохождении корней функции;

г) если требуется знать, когда значения функции положительны, т.е. $f(x) > 0$, то записываются интервалы, описываемые змейкой над осью. А если требуется знать, когда значения функции отрицательны, т.е. $f(x) < 0$, то интервалы, описываемые змейкой под осью.

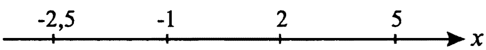
Найдем интервалы, для которых

$(x+2{,}5)(x-2)(x-5)(x+1) < 0.$

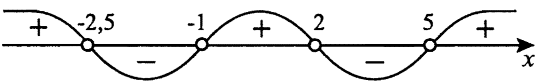
Очевидно, что вид канонический (т.е. все коэффициенты положительны). Найдем корни, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} x+2{,}5=0 \\ x-2=0, \\ x-5=0, \\ x+1=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-2{,}5 \\ x=2, \\ x=5, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Отметим их на числовой оси,



а затем проведем змейку, начиная ее справа, сверху.



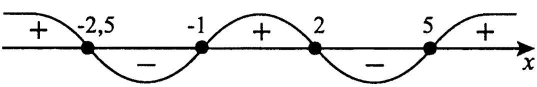
Так как $f(x) < 0$, то рассмотрим интервалы под числовой осью, описываемой змейкой, т.е. $-2{,}5 < x < -1$; $2 < x < 5$.

Примечание. Неравенство строгое, поэтому корни на оси отмечаются кружочками, не заштрихованными внутри. Ответ можно записать в виде интервалов: $(-2{,}5; -1) \cup (2; 5)$.

Выясним, на каких промежутках

$(x+2{,}5)(x-2)(x-5)(x+1) \geqslant 0.$

Рассуждая аналогично, получим



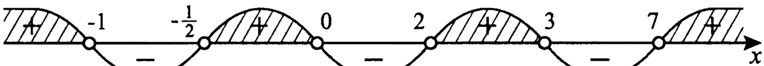
Теперь будем рассматривать интервалы над осью, включая сами корни, тогда все значения x из $[-2{,}5; -1] \cup [2; 5]$ есть решение неравенства.

Практикум 1
(Примеры использования метода интервалов)

Рассмотрим на различных примерах реализацию этой идеи и необходимое уточнение в ряде случаев.

1. $(x+1)(x-3)(2x+1)(x-7)(x-2)x > 0.$

Корни функции легко найти устно. Знак функции ($f(x) > 0$) положительный, тогда берем интервалы, описываемые змейкой над осью, и заштриховываем их для наглядности.

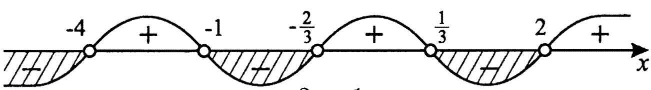


$x < -1$; $-\dfrac{1}{2} < x < 0$; $2 < x < 3$; $x > 7$, записываем ответ в виде интервалов.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup (2; 3) \cup (7; +\infty)$.

2. $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1) < 0.$

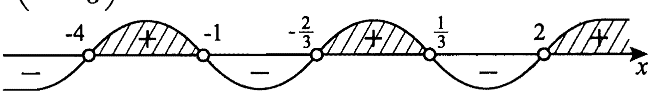
Знак функции ($f(x) < 0$) отрицательный. Берем интервалы, описываемые змейкой под числовой осью, и заштриховываем.



$x < -4$; $-1 < x < -\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{3} < x < 2$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

3. $\left(x + \dfrac{2}{3}\right)(3x-1)(x+4)(x-2)(x+1) > 0.$



$-4 < x < -1$; $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{1}{3}$; $x > 2$.

Ответ: $(-4; -1) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

4. $(x^2 - 3x - 4)x > 0$.

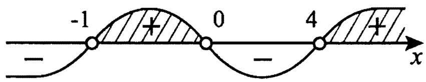
Для применения метода интервалов необходимо выражение в левой части разложить на множители.

Известно, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни.

Решим $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1, \end{array}\right.$ тогда $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$.

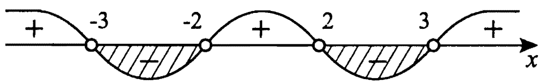
$(x - 4)(x + 1)x > 0$.



Ответ: $(-1; 0) \cup (4; +\infty)$.

5. $(x^2 - 9)(x^2 - 4) < 0$.

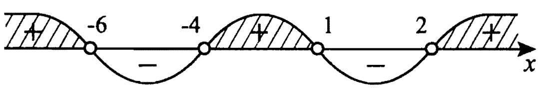
$(x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2) < 0$.



Ответ: $(-3; -2) \cup (2; 3)$.

6. $(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 2x - 8) > 0$.

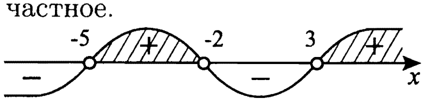
Так как $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ и $x^2 + 2x - 8 = $ $= (x + 4)(x - 2)$, $(x + 6)(x - 1)(x + 4)(x - 2) > 0$.



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-4; 1) \cup (2; +\infty)$.

7. $\dfrac{(x + 5)(x - 3)}{x + 2} > 0$.

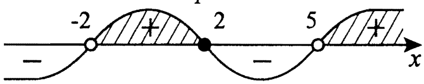
Интересно, что метод годится и для дробно-рациональных неравенств. Действительно, ведь чередование знаков не зависит от того, произведение сомножителей дано или их частное.



Ответ: $(-5; -2) \cup (3; +\infty)$.

8. $\dfrac{x-2}{(x+2)(x-5)} \geqslant 0.$

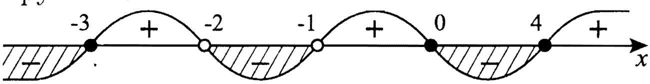
В этом примере следующая особенность: корни числителя являются решением неравенства, т.к. неравенство не строгое, а значения корней знаменателя всегда исключаются. Примечание: если значение корня есть решение неравенства, то оно обозначается сплошным кружочком на числовой прямой.



Ответ: $(-2;2] \cup (5;+\infty)$.

9. $\dfrac{(x+3)(x-4)x}{(x+1)(x+2)} \leqslant 0.$

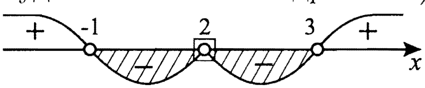
Не забываем, что в нестрогих неравенствах корни числителя включены в решение и обозначаются сплошным кружочком.



Ответ: $(-\infty;-3] \cup (-2;-1) \cup [0;4]$.

10. $(x-2)^2(x+1)(x-3) < 0.$

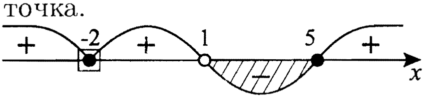
В этом примере корень выражения $x=2$ двойной кратности, а значит, выражение при прохождении этого корня дважды меняет знак на противоположный (такой корень будем обозначать квадратиком).



Ответ: $(-1;2) \cup (2;3)$.

11. $\dfrac{(x-5)(x+2)^2}{x-1} \leqslant 0.$

Очень любопытно, что корень $x=-2$ есть решение неравенства, т.е. в данном случае $x=-2$ как бы приклеенная точка.

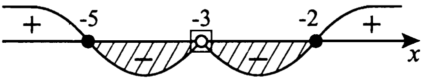


Ответ: $(1;5] \cup \{-2\}$.

12. $\dfrac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} \leqslant 0.$

$x^2+7x+10=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-5; \end{array}\right.$

$x^2+7x+10=(x+2)(x+5).\quad \dfrac{(x+2)(x+5)}{(x+3)^2} \leqslant 0.$



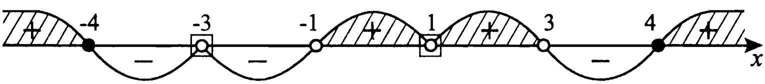
Ответ: $[-5;-3) \cup (-3;-2]$.

13. $\dfrac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \geqslant 0.$

$x^2+2x-3=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1; \end{array}\right. \quad x^2+2x-3=(x+3)(x-1).$

$\dfrac{(x+3)(x-1)(x+4)(x-4)}{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)} \geqslant 0.$

Отметим, что если в нестрогом неравенстве $x=a$ есть корень в разложении числителя и знаменателя, то он обязательно исключается из решения, т.е. обозначается полым кружочком. В данном случае он еще четной кратности.



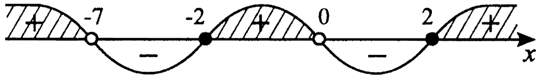
Ответ: $(-\infty;-4] \cup (-1;1) \cup (1;3) \cup [4;+\infty)$.

14. $\dfrac{4-x^2}{(x+7)x} \leqslant 0.$

Этот пример интересен тем, что не все коэффициенты при x положительны, а значит в чистом виде методом пользоваться нельзя. Какой же выход? Можно решать стандартным способом, умножив обе части неравенства на (-1), не забыв при этом поменять смысл[2] неравенства на противоположный. Приведем к каноническому виду:

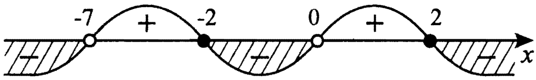
$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \leqslant 0 \quad \times(-1) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(2+x)}{(x+7)x} \geqslant 0.$$

[2] Под смыслом неравенства следует понимать знак неравенства



Ответ: $(-\infty; -7) \cup [-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

Но можно иначе, не меняя смысл неравенства. Действительно, $\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \leqslant 0$. Подумаем, что значит "неканонический" вид. Это значит на самом правом интервале функция принимает отрицательные значения, а это значит, что распределение знаков нужно начинать справа снизу.

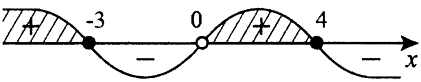


Ответ тот же: $(-\infty; -7) \cup [-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

15. $\dfrac{12+x-x^2}{x} \geqslant 0$.

$12 + x - x^2 = -(x+3)(x-4)$.

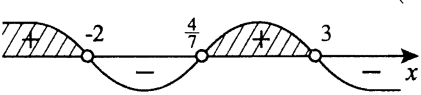
$\dfrac{-(x+3)(x-4)}{x} \geqslant 0$ — неканонический вид.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup (0; 4]$.

16. $\dfrac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x+2)} > 0$.

$x^2+2>0$ при любых x, значит, данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{4-7x}{(x-3)(x+2)} > 0$, так как можно обе части неравенства умножить на $\dfrac{1}{x^2+2}$ и получить неравенство того же смысла $\dfrac{4-7x}{(x-3)(x+2)} > 0$.

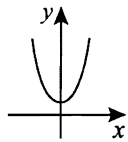


Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{4}{7}; 3\right)$.

17. $\dfrac{(x^2+3x+7)x}{(3x-1)(x+4)} \geqslant 0.$

Напоминаем, что если $y = ax^2 + bx + c$ такое, что $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases}$

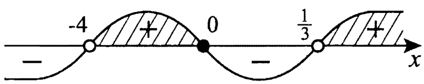
то $y > 0$ при всех x.



Значит $ax^2 + bx + c > 0$ для любых x.

В данном случае $D = 3^2 - 28 < 0$, т.е. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

Значит, $x^2 + 3x + 7 > 0$ для любых x, отсюда следует, что $\dfrac{(x^2+3x+7)x}{(3x-1)(x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{(3x-1)(x+4)} \geqslant 0.$



Ответ: $(-4; 0] \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

18. $\dfrac{2+3x-2x^2}{(x^4-16)x} \geqslant 0.$

$2x^2 - 3x - 2 = 0;$

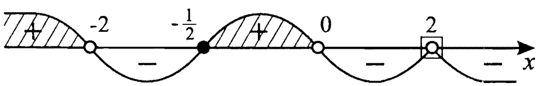
$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}; \qquad x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{1}{2};$

$-2x^2 + 3x + 2 = -2(x-2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right).$

$\dfrac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2-4)(x^2+4)x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+2)(x-2)x} \geqslant 0,$

так как $x^2 + 4 > 0$ для любых x.

Вид неравенства неканонический и $x = 2$ — корень четной кратности.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

19. $\dfrac{x^6-1}{x^6+1} \geqslant 0.\quad \dfrac{(x^2)^3-1}{(x^2)^3+1} \geqslant 0;$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$

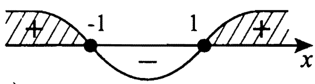
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$

$\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} \geqslant 0,$

так как $x^4+x^2+1>0$ при всех x $(x^4 \geqslant 0;\ x^2 \geqslant 0;\ 1>0)$, $x^2+1>0$ при всех x, $x^4-x^2+1>0$ при всех x $(x^2=t$, тогда $t^2-t+1>0$ для любых $t)$ так как $\begin{cases} a=1>0, \\ D=-3<0, \end{cases}$

значит, данное неравенство равносильно $x^2-1 \geqslant 0$.

$(x-1)(x+1) \geqslant 0.$



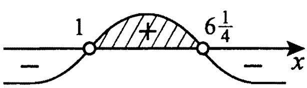
Ответ: $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

20. $\dfrac{21}{x-1} > 4.$

Чтобы решать неравенства такого типа, надо перенести все члены неравенства в одну сторону, привести к общему знаменателю, разложить на множители числитель и знаменатель получившегося дробно-рационального выражения. После чего можно пользоваться методом интервалов.

$\dfrac{21}{x-1}-4>0;\ \dfrac{21-4(x-1)}{x-1}>0;\ \dfrac{21-4x+4}{x-1}>0;$

$\dfrac{25-4x}{x-1}>0.$

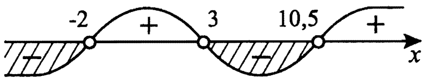


Ответ: $\left(1;6\dfrac{1}{4}\right)$.

21. $\dfrac{5}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}.$

$\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{3}{x-3}<0;\quad \dfrac{5(x-3)-3(x+2)}{(x+2)(x-3)}<0;$

$\dfrac{5x-15-3x-6}{(x+2)(x-3)}<0;\quad \dfrac{2x-21}{(x+2)(x-3)}<0.$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (3; 10{,}5)$.

22. $\dfrac{2}{x^2-3x-4} \geqslant \dfrac{3}{x^2+x-6}$.

$$\frac{2}{x^2-3x-4} - \frac{3}{x^2+x-6} \geqslant 0.$$

$$x^2-3x-4=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1; \end{array}\right. \quad x^2-3x-4=(x-4)(x+1);$$

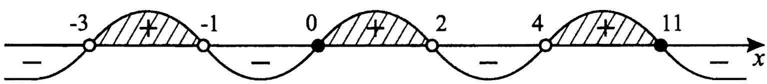
$$x^2+x-6=0 \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2; \end{array}\right. \quad x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

$$\frac{2(x^2+x-6)-3(x^2-3x-4)}{(x^2-3x-4)(x^2+x-6)} \geqslant 0;$$

$$\frac{2x^2+2x-12-3x^2+9x+12}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0.$$

$$\frac{-x^2+11x}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{-x(x-11)}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0.$$



Ответ: $(-3; -1) \cup [0; 2) \cup (4; 11]$.

23. $\dfrac{3-x}{(x+2)(x-1)} \leqslant \dfrac{2(3-x)}{2x^2-x-1}$.

$$(3-x)\left(\frac{1}{(x+2)(x-1)} - \frac{2}{2x^2-x-1}\right) \leqslant 0;$$

$$(3-x)\frac{2x^2-x-1-2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(2x^2-x-1)} \leqslant 0.$$

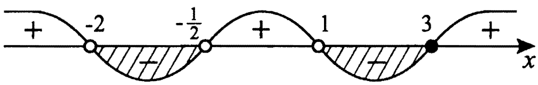
Так как $2x^2-x-1 = 2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$,

$$\frac{(3-x)(2x^2-x-1-2x^2-2x+4)}{(x+2)(x-1)\cdot 2(x-1)(x+\frac{1}{2})} \leqslant 0.$$

$$\frac{(3-x)(3-3x)}{(x+2)(x-1)\cdot 2(x-1)(x+\frac{1}{2})} \leqslant 0;$$

$$\frac{3(x-3)(x-1)}{2(x+2)(x-1)^2(x+\frac{1}{2})} \leqslant 0.$$

Отметим, что $x = 1$ — корень нечетной кратности.



Ответ: $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 3]$.

24. $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x-3} \leqslant \dfrac{x^4 - 16}{x+3}$.

$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2-4)(x^2+2) = (x-2)(x+2)(x^2+2);$

$$\frac{(x^2-4)(x^2+2)}{x-3} - \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x+3} \leqslant 0;$$

$$(x^2-4)\left(\frac{x^2+2}{x-3} - \frac{x^2+4}{x+3}\right) \leqslant 0;$$

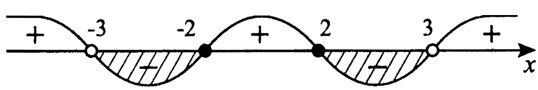
$$(x+2)(x-2)\cdot\frac{(x^2+2)(x+3)-(x-3)(x^2+4)}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0;$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x^3+3x^2+2x+6-x^3+3x^2-4x+12)}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0;$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(6x^2-2x+18)}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0.$$

$6x^2 - 2x + 18 > 0$ при всех x, так как $\begin{cases} a = 6 > 0, \\ \dfrac{D}{4} = -107 < 0. \end{cases}$

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-3)} \leqslant 0$$



Ответ: $(-3; -2] \cup [2; 3)$.

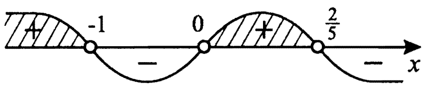
25. $\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} > \dfrac{5}{x}$.

$\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x} > 0; \qquad \dfrac{2-3x-5x^2}{x^3} > 0;$

$$2-3x-5x^2=-5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right), \text{ так как } 5x^2+3x-2=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{10}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

$$\frac{-5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x^3}>0$$



Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$.

26. $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}\leqslant\dfrac{4}{2x-1}$.

Приводить к общему знаменателю сразу нерационально, так как получим в числителе многочлен третьей степени, который разложить на множители достаточно трудно. Поэтому попробуем вначале упростить (сократить) левую часть неравенства.

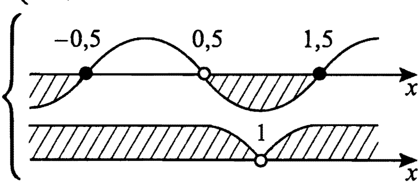
$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$, так как

$$2x^2-3x+1=0; \quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

тогда $\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x-1}\leqslant\dfrac{4}{2x-1}$, т. е.

$$\begin{cases} 2x-1\leqslant\dfrac{4}{2x-1}, \\ x\neq1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(2x-1)^2-4}{2x-1}\leqslant0, \\ x\neq1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-1+2)(2x-1-2)}{2x-1}\leqslant0, \\ x\neq1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(2x+1)(2x-3)}{2x-1}\leqslant0, \\ x\neq1. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;-0{,}5]\cup(0{,}5;1)\cup(1;1{,}5]$.

27. $\dfrac{x^2-1}{3x^4-4x^2+1} \geqslant \dfrac{3x^2-1}{9}$.

По аналогии попробуем вначале упростить левую часть неравенства, предварительно заменив переменную.

Обозначим $x^2 = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{t-1}{3t^2-4t+1} \geqslant \frac{3t-1}{9};$$

$3t^2-4t+1 = (3t-1)(t-1)$, так как

$$3t^2-4t+1=0; \quad t_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3} = \frac{2\pm 1}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{3}, \end{array}\right.$$

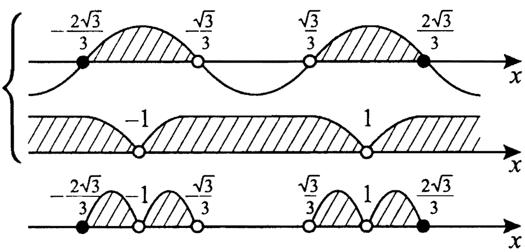
тогда $\dfrac{t-1}{(3t-1)(t-1)} \geqslant \dfrac{3t-1}{9}$; $\quad \begin{cases} \dfrac{1}{3t-1} \geqslant \dfrac{3t-1}{9}, \\ t \neq 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{9-(3t-1)^2}{3t-1} \geqslant 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(3-3t+1)(3+3t-1)}{3t-1} \geqslant 0, \\ t \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(4-3t)(2+3t)}{3t-1} \geqslant 0, \\ t \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(4-3x^2)(2+3x^2)}{3x^2-1} \geqslant 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Так как $2+3x^2 > 0$ для всех x, то

$$\begin{cases} \dfrac{4-3x^2}{3x^2-1} \geqslant 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$



Ответ: $\left[-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

Проверим, все ли идеи метода интервалов усвоены.

Некоторые итоги

Для того, чтобы использовать метод интервалов для решения неравенств, необходимо:

1. Разложить $f(x)$ на множители;
2. Определить вид разложения функции:
   а) если вид канонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа сверху, и знаки чередуются;
   б) если вид неканонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа снизу, и знаки чередуются, проходя корни функции;
3. Уточнить кратность корней: если есть корни четной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечетной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный;
4. Обратить внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки;
5. Для дробных неравенств не забыть отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки;
6. Для нестрогого дробного неравенства при наличии корней в разложении и в числителе, и в знаменателе на оси абсцисс отметить полые точки.

Тренировочная работа 1

Решите неравенства 1–10:

1. $\dfrac{x+4}{(x+5)x} < 0.$

2. $\dfrac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0.$

3. $\dfrac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0.$

4. $\dfrac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leqslant 0.$

5. $\dfrac{4x+3}{x+2} > 5.$

6. $\dfrac{6x-1}{4x+3} \leqslant \dfrac{3x-2}{2x-1}.$

7. $\dfrac{5}{-6x+3} + \dfrac{6x}{1-2x} \geqslant 0.$

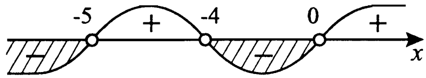
8. $\dfrac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \dfrac{3x+7}{3x-6} \leqslant 0.$

9. $\dfrac{6}{-4x-x^2} - \dfrac{2}{x^2-4x} + \dfrac{x}{x^2-16} \geqslant 0.$

10. $\left(\dfrac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \dfrac{2x^2-x}{-x^3+8} - \dfrac{2-x}{2x^2+x}\right) : \dfrac{4}{x^2-2x} \geqslant \dfrac{4-x}{x+2x^2}.$

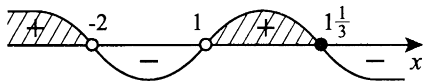
Решение тренировочной работы 1

1. $\dfrac{x+4}{(x+5)x} < 0.$



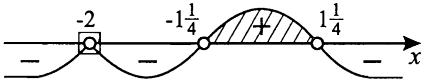
Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-4; 0).$

2. $\dfrac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0.$



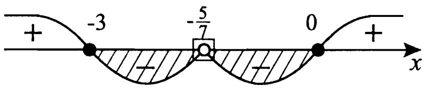
Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(1; 1\dfrac{1}{3}\right].$

3. $\dfrac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0. \quad \dfrac{(5+4x)(5-4x)}{(x+2)^2} > 0.$



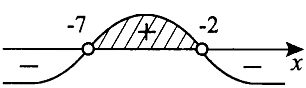
Ответ: $\left(-1\dfrac{1}{4}; 1\dfrac{1}{4}\right).$

4. $\dfrac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leqslant 0. \quad \dfrac{x(x+3)}{(7x+5)^2} \leqslant 0.$



Ответ: $\left[-3; -\dfrac{5}{7}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{7}; 0\right].$

5. $\dfrac{4x+3}{x+2} > 5. \quad \dfrac{4x+3-5(x+2)}{x+2} > 0; \quad \dfrac{-x-7}{x+2} > 0.$



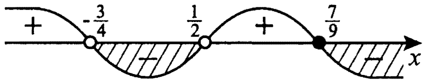
Ответ: $(-7; -2).$

6. $\dfrac{6x-1}{4x+3} \leqslant \dfrac{3x-2}{2x-1}. \quad \dfrac{6x-1}{4x+3} - \dfrac{3x-2}{2x-1} \leqslant 0;$

$$\frac{(6x-1)(2x-1)-(3x-2)(4x+3)}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0;$$

$$\frac{12x^2 - 8x + 1 - 12x^2 - x + 6}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0;$$

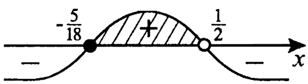
$$\frac{7 - 9x}{(4x+3)(2x-1)} \leqslant 0.$$



Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{9}; +\infty\right)$.

7. $\dfrac{5}{-6x+3} + \dfrac{6x}{1-2x} \geqslant 0.$

$$\frac{5}{3(1-2x)} + \frac{6x}{1-2x} \geqslant 0; \quad \frac{5+18x}{3(1-2x)} \geqslant 0$$



Ответ: $\left[-\frac{5}{18}; \frac{1}{2}\right)$.

8. $\dfrac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \dfrac{3x+7}{3x-6} \leqslant 0.$

$$\frac{x^2+7x+8}{(x+1+3)(x+1-3)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leqslant 0;$$

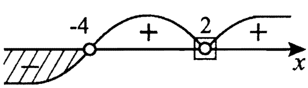
$$\frac{x^2+7x+8}{(x+4)(x-2)} - \frac{3x+7}{3(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{3(x^2+7x+8) - (3x+7)(x+4)}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{3x^2+21x+24-3x^2-19x-28}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{2x-4}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0; \quad \frac{2(x-2)}{3(x+4)(x-2)} \leqslant 0.$$

Корень $x = 2$ двойной кратности.



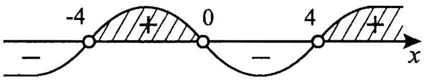
Ответ: $(-\infty; -4)$.

9. $\dfrac{6}{-4x-x^2}-\dfrac{2}{x^2-4x}+\dfrac{x}{x^2-16}\geqslant 0.$

$\dfrac{6}{-x(x+4)}-\dfrac{2}{x(x-4)}+\dfrac{x}{(x+4)(x-4)}\geqslant 0;$

$\dfrac{-6(x-4)-2(x+4)+x^2}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0;$

$\dfrac{x^2-8x+16}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0;\quad \dfrac{(x-4)^2}{x(x-4)(x+4)}\geqslant 0$



Ответ: $(-4;0)\cup(4;+\infty)$.

10. $\left(\dfrac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2-x}{-x^3+8}-\dfrac{2-x}{2x^2+x}\right):\dfrac{4}{x^2-2x}\geqslant\dfrac{4-x}{x+2x^2}.$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4);\quad x\neq 2,\ x\neq\pm\dfrac{1}{2},\ x\neq 0.$

$\left(\frac{(x^2+2x+4)\cdot x\cdot(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)(2-x)(x^2+2x+4)}-\frac{2-x}{x(2x+1)}\right)\cdot\frac{x(x-2)}{4}-\frac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\left(\dfrac{x}{(2x+1)(2-x)}-\dfrac{2-x}{x(2x+1)}\right)\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0$

(так как $x^2+2x+4>0$ при всех x).

$\dfrac{x^2-(2-x)^2}{(2x+1)(2-x)x}\cdot\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{(x+2-x)(x-2+x)x(x-2)}{(2x+1)(2-x)x\cdot 4}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{2\cdot 2(x-1)\cdot(-1)}{4(2x+1)}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

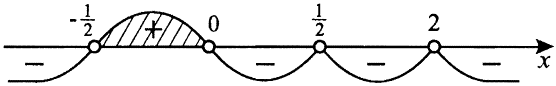
$\dfrac{1-x}{2x+1}-\dfrac{4-x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$\dfrac{x-x^2-4+x}{x(1+2x)}\geqslant 0;$

$$\frac{-(x^2-2x+4)}{x(1+2x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(1+2x)} \geqslant 0$$

(так как $x^2-2x+4>0$ при всех x).

$-\dfrac{1}{x(1+2x)} \geqslant 0$ при всех $x \neq 2$; $x \neq \pm\dfrac{1}{2}$; $x \neq 0$.



Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Примечание. Так как в процессе решения неравенства произошли сокращения на множители $(x-2)$ и $x-\dfrac{1}{2}$, то это означает, что по сути $x=2$ и $x=\dfrac{1}{2}$ — корни двойной кратности. Значит, проходя через них, функция меняет свой знак дважды.

Проверочная работа 1

Решите неравенства 1–10:

1. $\dfrac{x-4}{(x-3)x} < 0.$

2. $\dfrac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geqslant 0.$

3. $\dfrac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0.$

4. $\dfrac{49x^2-70x+25}{x^2-3x} \leqslant 0.$

5. $\dfrac{4x-3}{x-5} > 5.$

6. $\dfrac{6x+1}{4x-3} \leqslant \dfrac{3x+2}{2x+1}.$

7. $\dfrac{6}{-4x+2} - \dfrac{5x}{1-2x} \leqslant 0.$

8. $\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9} - \dfrac{3x+1}{3x-12} \leqslant 0.$

9. $\dfrac{1}{2x^2-5x} - \dfrac{2}{25+10x} + \dfrac{4}{25-4x^2} \geqslant 0.$

10. $\left(\dfrac{4}{x^2+4x} + \dfrac{32-3x}{x^3+64}\right) : \dfrac{x+8}{x^3-4x^2+16x} \geqslant \dfrac{4}{4+x}.$

Итак, если у вас все получилось, то можно перейти к следующей теме, если нет, имеет смысл еще потренироваться.

Тренировочная работа 2

1. $(x-2)^2(x+3)^3x<0.$

2. $(x^2-x-2)(x-2)(x-1)\leqslant 0.$

3. $(1-x^3)^2(x^2-5x)\leqslant 0.$

4. $(1-2x)(x+2)>0.$

5. $1-2x\leqslant \frac{3}{x}.$

6. $\dfrac{7-x}{x}<3.$

7. $\dfrac{x+3}{x-2}\geqslant \dfrac{x-3}{x+4}.$

8. $(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8>0.$

9. $\dfrac{x^2+x-20}{(x-3)x}>0.$

10. $\dfrac{x^4+5x^2-6}{(4-x)^3}<0.$

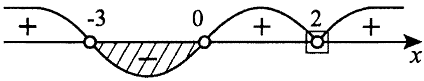
11. $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2>1.$

12. $\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2\geqslant \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-6}.$

Проверьте, правильно ли вы решили.

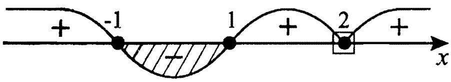
Решение тренировочной работы 2

1. $(x-2)^2(x+3)^3x<0.$



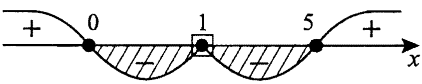
Ответ: $(-3;0)$.

2. $(x^2-x-2)(x-2)(x-1)\leqslant 0.$
Так как $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$,
$(x-2)(x+1)(x-2)(x-1)\leqslant 0.$



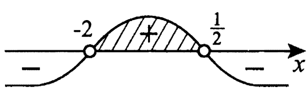
Ответ: $[-1;1]\cup\{2\}$.

3. $(1-x^3)^2(x^2-5x)\leqslant 0.$
$(1-x)^2(1+x+x^2)^2\cdot x(x-5)\leqslant 0;$
$x^2+x+1>0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a=1>0, \\ D=-3<0; \end{cases}$
$(1-x)^2=(x-1)^2$ — вид канонический.
$(1-x)^2\cdot x(x-5)\leqslant 0.$



Ответ: $[0;5]$.

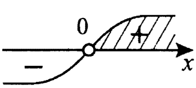
4. $(1-2x)(x+2)>0.$



Ответ: $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

5. $1-2x\leqslant\dfrac{3}{x}$. $\quad\dfrac{2x^2-x+3}{x}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\geqslant 0,$

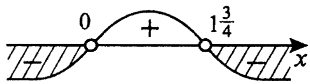
так как $2x^2-x+3>0$ (при всех x) и $\begin{cases} a=2>0, \\ D=-23. \end{cases}$



Ответ: $(0;+\infty)$.

6. $\dfrac{7-x}{x} < 3.$

$\dfrac{7-x-3x}{x} < 0; \quad \dfrac{7-4x}{x} < 0.$

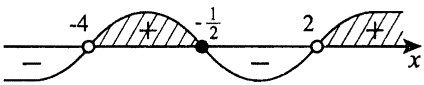


Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(1\dfrac{3}{4}; +\infty\right).$

7. $\dfrac{x+3}{x-2} \geqslant \dfrac{x-3}{x+4}.$

$\dfrac{(x+3)(x+4)-(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0;$

$\dfrac{x^2+7x+12-x^2+5x-6}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0; \quad \dfrac{12x+6}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0.$



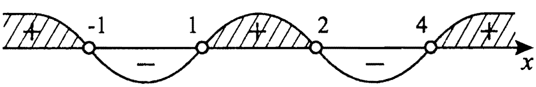
Ответ: $\left(-4; -\dfrac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty).$

8. $(x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 > 0.$

Пусть $x^2 - 3x = t.$

$t^2 - 2t - 8 = (t+2)(t-4) = (x^2-3x+2)(x^2-3x-4) =$
$= (x-1)(x-2)(x-4)(x+1).$

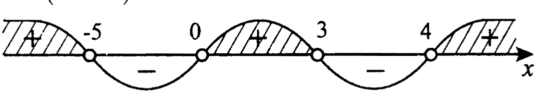
Итак, $(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) > 0.$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty).$

9. $\dfrac{x^2+x-20}{(x-3)x} > 0.$

$\dfrac{(x+5)(x-4)}{(x-3)x} > 0.$



Ответ: $(-\infty; -5) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty).$

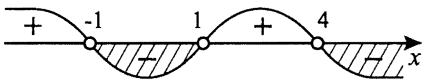
10. $\dfrac{x^4+5x^2-6}{(4-x)^3}<0.$

$x^4+5x^2-6=(x^2+6)(x^2-1)$, так как $x^2=t$;

$x^4+5x^2-6=t^2+5t-6=(t+6)(t-1)=(x^2+6)(x^2-1)$;

$x^2+6>0$ (при всех x);

$\dfrac{(x^2+6)(x^2-1)}{-(x-4)^3}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-4)^3}<0.$

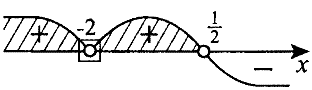


Ответ: $(-1;1)\cup(4;+\infty)$.

11. $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2>1.$

$\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2-1>0;\quad \left(\dfrac{3-x}{2+x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{3-x}{2+x}-1\right)>0;$

$\dfrac{3-x+2+x}{2+x}\cdot\dfrac{3-x-2-x}{2+x}>0;\quad \dfrac{5(1-2x)}{(2+x)^2}>0.$



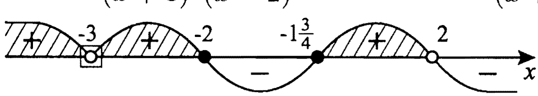
Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$.

12. $\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2\geqslant\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-6}.$

$\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^2-\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-2)}\geqslant 0;\quad \dfrac{x+2}{x+3}\cdot\left[\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x-2}\right]\geqslant 0;$

$\dfrac{x+2}{x+3}\cdot\dfrac{(x+2)(x-2)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}\geqslant 0;$

$\dfrac{(x+2)(x^2-4-x^2-4x-3)}{(x+3)^2(x-2)}\geqslant 0;\quad \dfrac{-(x+2)(4x+7)}{(x+3)^2(x-2)}\geqslant 0.$



Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup\left[-1\dfrac{3}{4};2\right)$.

Проверочная работа 2

1. $(x^2+x+2)(x+2)(1-x)^2>0.$

2. $(x^4-x^2+2)(x^2+x-2)^2\leqslant 0.$

3. $(1-x^2)^3(x^2+5x)>0.$

4. $(3x-2)(3-2x)<0.$

5. $x+\dfrac{5}{x}\leqslant 6.$

6. $\dfrac{x-2}{x+3}\leqslant\dfrac{x+4}{x-3}.$

7. $2(x+2)^2-3(x+2)+1\leqslant 0.$

8. $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

9. $\dfrac{(-20x^2+x+1)(x-2)}{x^2+3}<0.$

10. $\dfrac{(1-x^8)(1-x^6)(1-x^4)}{(1-x^3)(1+2x)^3}\leqslant 0.$

11. $\left(\dfrac{x+1}{4-x}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}.$

12. $\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}.$

Системы неравенств

Практикум 2

1. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} - \dfrac{4-3x}{4} < \dfrac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x), \\ \dfrac{3+x}{4} + \dfrac{1-2x}{6} \geqslant 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{2x-7} > 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{6-x}{2} \geqslant 2x - 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{7x+3}{x+3} \geqslant \dfrac{-x}{2(x+3)}, \\ \dfrac{4+x}{2x-3} \leqslant \dfrac{5+3x}{3-2x}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} < \dfrac{x+7}{x+6}, \\ \dfrac{x+4}{x+8} > \dfrac{x-7}{x-3}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ (5-x)^2 \leqslant 2^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 1, \\ \dfrac{2x+3}{x^2-1} < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^3-8x^2+12x}{x-6} \leqslant 6x, \\ x - 2 \leqslant \dfrac{x^3-8x^2+12x}{x-6}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-2} + \dfrac{7}{x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3} \geqslant \dfrac{3x-8}{x-3}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x+4\right) < 48, \\ \left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x+5\right) < 24. \end{cases}$

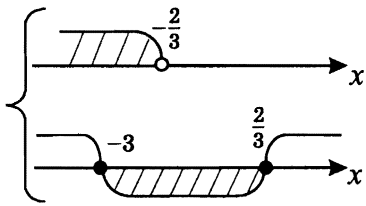
Решение практикума 2

1. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} - \dfrac{4-3x}{4} < \dfrac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leqslant 0. \end{cases} \Bigg| \cdot 12$

$3x^2 + 7x - 6 = 0; \qquad x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 11}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ x = -3. \end{array} \right.$

$$\begin{cases} 6(x+4) - 3(4-3x) < 2, \\ 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+3) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 10 < 0, \\ 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+3) \leqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left[-3; -\dfrac{2}{3}\right)$.

2. $\begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+3)(4-x), \\ \dfrac{3+x}{4} + \dfrac{1-2x}{6} \geqslant 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} 4 - x^2 < -x^2 + x + 12, \\ 3(3+x) + 2(1-2x) \geqslant 12; \end{cases}$$

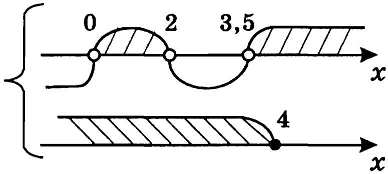
$$\begin{cases} x > -8, \\ x \leqslant -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-8; -1]$.

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 7}{2x - 7} > 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{6-x}{2} \geqslant 2x - 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 7 - 2x + 7}{2x - 7} > 0, \\ 2(3x-2) - 5(6-x) \geqslant 20x - 70; \end{cases}$$

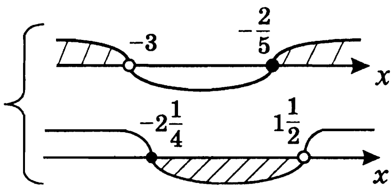
$$\begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{2x-7} > 0, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$$



Ответ: $(0;2) \cup (3,5;4]$.

4. $$\begin{cases} \dfrac{7x+3}{x+3} \geqslant \dfrac{-x}{2(x+3)}, \\ \dfrac{4+x}{2x-3} \leqslant \dfrac{5+3x}{3-2x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2(7x+3)+x}{2(x+3)} \geqslant 0, \\ \dfrac{4+x+5+3x}{2x-3} \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{15x+6}{2(x+3)} \geqslant 0, \\ \dfrac{4x+9}{2x-3} \leqslant 0. \end{cases}$$



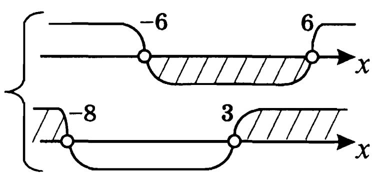
Ответ: $[-0,4;1,5)$.

5. $$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} < \dfrac{x+7}{x+6}, \\ \dfrac{x+4}{x+8} > \dfrac{x-7}{x-3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+6)-(x+7)(x-6)}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \dfrac{(x+4)(x-3)-(x-7)(x+8)}{(x+8)(x-3)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x-30-x^2-x+42}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \dfrac{x^2+x-12-x^2-x+56}{(x+8)(x-3)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{12}{(x-6)(x+6)} < 0, \\ \dfrac{44}{(x+8)(x-3)} > 0. \end{cases}$$



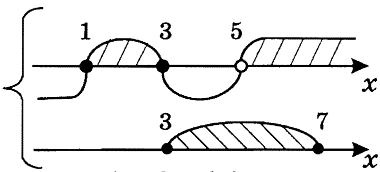
Ответ: $(3;6)$.

6. $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ (5-x)^2 \leqslant 2^2. \end{cases}$

Так как $(\alpha)^2 < (\beta)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < |\beta|, \\ \alpha > -|\beta|, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+7)+(3x+1)(x-5)}{2(x-5)} \geqslant 0, \\ \begin{cases} 5-x \leqslant 2, \\ 5-x \geqslant -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-14x-5+2x+14}{2(x-5)} \geqslant 0, \\ \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 7; \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{3x^2-12x+9}{2(x-5)} \geqslant 0, \\ 3 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$



Ответ: $(5;7] \cup \{3\}$.

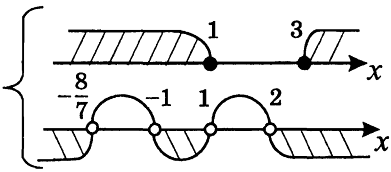
7. $\begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 1, \\ \dfrac{2x+3}{x^2-1} < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$ Так как $(\alpha)^2 > (\beta)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > |\beta| \\ \alpha < -|\beta|, \end{array} \right.$ то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2 \geqslant 1 \\ x-2 \leqslant -1, \end{array} \right. \\ \dfrac{3(2x+3)-7\left(x^2-1\right)}{3(x^2-1)} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3 \\ x \leqslant 1, \end{array} \right. \\ \dfrac{-7x^2+6x+16}{3(x+1)(x-1)} < 0; \end{cases}$$

$$7x^2-6x-16=0; \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm 11}{7}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{8}{7}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3 \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ \dfrac{-7\,(x-2)\left(x+\frac{8}{7}\right)}{3\,(x+1)\,(x-1)} < 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{8}{7}\right) \cup (-1; 1) \cup [3; \infty)$.

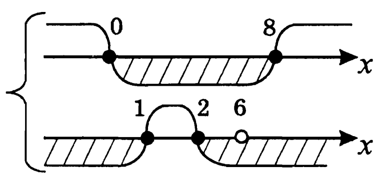
8. $$\begin{cases} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x-6} \leqslant 6x, \\ x - 2 \leqslant \dfrac{x^3 - 8x^2 + 12x}{x-6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x\left(x^2 - 8x + 12\right)}{x-6} \leqslant 6x, \\ x - 2 \leqslant \dfrac{x\left(x^2 - 8x + 12\right)}{x-6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x\,(x-2)\,(x-6)}{x-6} \leqslant 6x, \\ x - 2 \leqslant \dfrac{x\,(x-2)\,(x-6)}{x-6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,(x-2) \leqslant 6x, \\ x - 2 \leqslant x\,(x-2), \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,(x-8) \leqslant 0, \\ (x-2)\,(1-x) \leqslant 0, \\ x \neq 6. \end{cases}$$



Ответ: $[0; 1] \cup [2; 6) \cup (6; 8]$.

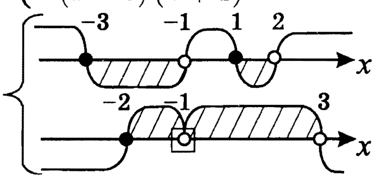
9. $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\dfrac{7}{x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-14x+6}{x^2-4x+3} \geqslant \dfrac{3x-8}{x-3}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+11+7(x-2)}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-14x+6-(3x-8)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-14x+6-3x^2+11x-8}{(x-3)(x+1)} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0, \\ \dfrac{-x^2-3x-2}{(x-3)(x+1)} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0, \\ \dfrac{-(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+1)} \geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-2;-1) \cup [1;2)$.

10. $\begin{cases} \left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+3x+4\right) < 48, \\ \left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x+5\right) < 24. \end{cases}$

Пусть $x^2+3x+2=t$ для первого неравенства и $x^2-2x=z$ для второго неравенства, тогда система примет вид

$$\begin{cases} t(t+2) < 48, \\ z(z+5) < 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2+2t-48 < 0, \\ z^2+5z-24 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+8)(t-6)<0, \\ (z+8)(z-3)<0. \end{cases}$$

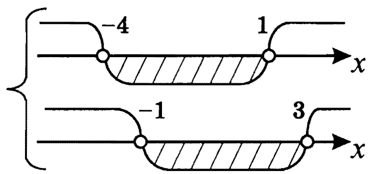
Теперь вместо t и z вновь возвратимся к прежнему x:

$$\begin{cases} \left(x^2+3x+10\right)\left(x^2+3x-4\right)<0, \\ \left(x^2-2x+8\right)\left(x^2-2x-3\right)<0. \end{cases}$$

Так как $x^2+3x+10>0$ (при всех x) $\begin{cases} a=1>0, \\ D<0 \end{cases}$

и $x^2-2x+5>0$ (при всех x) $\begin{cases} a=1>0, \\ D<0, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} (x+4)(x-1)<0, \\ (x-3)(x+1)<0. \end{cases}$$



Ответ: $(-1;1)$.

Тренировочная работа 3

1. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{-4x}{12} < \dfrac{1}{30}, \\ 9x^2 - 6x - 8 \leqslant 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+3)(3-x) < (x+4)(5-x), \\ \dfrac{x+4}{14} + \dfrac{2-3x}{4} \geqslant 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{4x-9} > 1, \\ \dfrac{4x-3}{7} - \dfrac{5-x}{5} \leqslant \dfrac{x+3}{2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+4} \geqslant \dfrac{x}{2(x+4)}, \\ \dfrac{10+2x}{3x-5} \leqslant \dfrac{6+4x}{5-3x}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2x-7}{x-4} < \dfrac{2x+9}{x+4}, \\ \dfrac{3x+5}{3x+8} > \dfrac{3x-7}{3x-4}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+8}{x-4} + \dfrac{3x+4}{2} \geqslant 0, \\ (4-x)^2 \leqslant 2^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-4)^2 \geqslant 1, \\ \dfrac{2x-1}{x^2-4x+3} < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^3-8x^2+15x}{x-5} \leqslant 3x, \\ x-3 \leqslant \dfrac{x^3-8x^2+15x}{x-5}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x^2-9x+25}{x^2-5x+4} + \dfrac{7}{x-1} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-22x+42}{x^2-8x+15} \geqslant \dfrac{3x-14}{x-5}. \end{cases}$

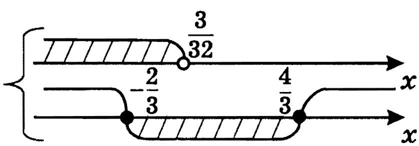
10. $\begin{cases} \left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-6x+13\right) < 24, \\ \left(x^2-x\right)\left(x^2-x+2\right) < 48. \end{cases}$

Решение тренировочной работы 3

1. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{5-4x}{12} < \dfrac{1}{30} & \Big| \cdot 60 \\ 9x^2 - 6x - 8 \leqslant 0 \end{cases}$

$9x^2 - 6x - 8 = 0; \quad x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+72}}{9} = \dfrac{3 \pm 9}{9}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3}; \end{array}\right.$

$\begin{cases} 12(x+2) - 5(5-4x) < 2. \\ 9\left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(x + \dfrac{2}{3}\right) \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 32x - 3 < 0, \\ 9\left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(x + \dfrac{2}{3}\right) \leqslant 0. \end{cases}$



Ответ: $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{32}\right)$.

2. $\begin{cases} (x+3)(3-x) < (x+4)(5-x), \\ \dfrac{x+4}{14} + \dfrac{2-3x}{4} \geqslant 1; \end{cases}$

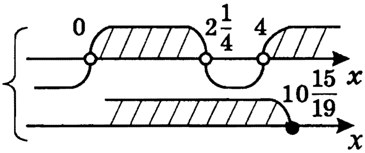
$\begin{cases} 9 - x^2 < -x^2 + x + 20, \\ 4(x+4) + 14(2-3x) \geqslant 56; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -11, \\ x \leqslant -\dfrac{6}{19}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-11; -\dfrac{6}{19}\right]$.

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{4x-9} > 1, \\ \dfrac{4x-3}{7} - \dfrac{5-x}{5} \leqslant \dfrac{x+3}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9 - 4x + 9}{4x-9} > 0, \\ 10(4x-3) - 14(5-x) \leqslant 35(x+3); \end{cases}$

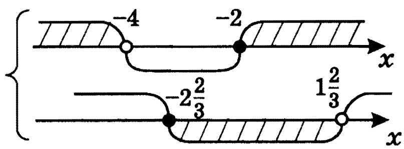
$$\begin{cases} \dfrac{x^2-4x}{4x-9} > 0, \\ 40x - 30 - 70 + 14x \leqslant 35x + 105; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x(x-4)}{4x-9} > 0, \\ 19x \leqslant 205. \end{cases}$$



Ответ: $\left(0; 2\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(4; 10\dfrac{15}{19}\right]$.

4. $$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{x+4} \geqslant \dfrac{x}{2(x+4)}, \\ \dfrac{10+2x}{3x-5} \leqslant \dfrac{6+4x}{5-3x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2(3x+5)-x}{2(x+4)} \geqslant 0, \\ \dfrac{10+2x+6+4x}{3x-5} \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x+10}{2(x+4)} \geqslant 0, \\ \dfrac{6x+16}{3x-5} \leqslant 0. \end{cases}$$



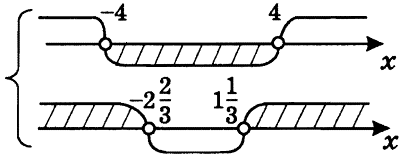
Ответ: $\left[-2; 1\dfrac{2}{3}\right)$.

5. $$\begin{cases} \dfrac{2x-7}{x-4} < \dfrac{2x+9}{x+4}, \\ \dfrac{3x+5}{3x+8} > \dfrac{3x-7}{3x-4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-7)(x+4)-(2x+9)(x-4)}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \dfrac{(3x+5)(3x-4)-(3x-7)(3x+8)}{(3x+8)(3x-4)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+x-28-2x^2-x+36}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \dfrac{9x^2+3x-20-9x^2-3x+56}{(3x+8)(3x-4)} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{8}{(x-4)(x+4)} < 0, \\ \dfrac{36}{(3x+8)(3x-4)} > 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-4; -2\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{3}; 4\right)$.

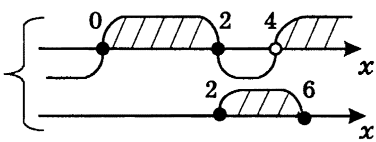
6. $\begin{cases} \dfrac{x+8}{x-4} + \dfrac{3x+4}{2} \geqslant 0, \\ (4-x)^2 \leqslant 2^2. \end{cases}$

Так как $\alpha^2 < \beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < |\beta|, \\ \alpha > -|\beta|, \end{cases}$ то

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+8)+(x-4)(3x+4)}{2(x-4)} \geqslant 0, \\ \begin{cases} 4-x \leqslant 2, \\ 4-x \geqslant -2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+16+3x^2-8x-16}{2(x-4)} \geqslant 0, \\ \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 6; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-6x}{2(x-4)} \geqslant 0, \\ 2 \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$



Ответ: $(4; 6] \cup \{2\}$.

7. $\begin{cases} (x-4)^2 \geqslant 1, \\ \dfrac{2x-1}{x^2-4x+3} < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$

Так как $\alpha^2 > \beta^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > |\beta| \\ \alpha < -|\beta|, \end{array}\right.$ то

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-4 \geqslant 1 \\ x-4 \leqslant -1, \end{array}\right. \\ \dfrac{3(2x-1)-7(x^2-4x+3)}{3(x^2-4x+3)} < 0; \end{cases}$$

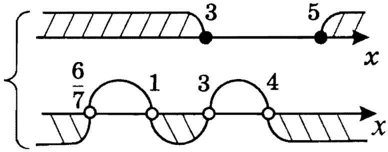
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5 \\ x \leqslant 3, \end{array}\right. \\ \dfrac{-7x^2+34x-24}{3\left(x^2-4x+3\right)} < 0. \end{cases}$$

$$7x^2 - 34x + 24 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-168}}{7} = \frac{17 \pm 11}{7}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{6}{7}; \end{array}\right.$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1);$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5 \\ x \leqslant 3, \end{array}\right. \\ \dfrac{-7(x-4)\left(x-\frac{6}{7}\right)}{3(x-1)(x-3)} < 0. \end{cases}$$

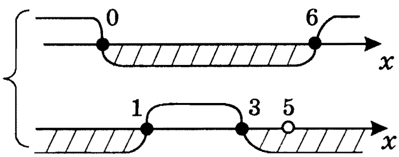


Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{6}{7}\right) \cup (1;3) \cup [5;\infty)$.

8. $$\begin{cases} \dfrac{x^3-8x^2+15x}{x-5} \leqslant 3x, \\ x-3 \leqslant \dfrac{x^3-8x^2+15x}{x-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x\left(x^2-8x+15\right)}{x-5} \leqslant 3x, \\ x-3 \leqslant \dfrac{x\left(x^2-8x+15\right)}{x-5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-3)(x-5)}{x-5} \leqslant 3x, \\ x-3 \leqslant \dfrac{x(x-3)(x-5)}{x-5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-3) \leqslant 3x, \\ x-3 \leqslant x(x-3), \\ x \neq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-6) \leqslant 0, \\ (x-3)(1-x) \leqslant 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$$



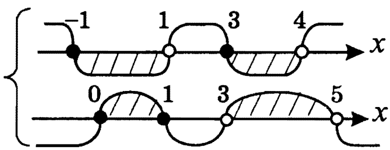
Ответ: $[0;1] \cup [3;5) \cup (5;6]$.

9. $\begin{cases} \dfrac{x^2-9x+25}{x^2-5x+4}+\dfrac{7}{x-1}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-22x+42}{x^2-8x+15}\geqslant \dfrac{3x-14}{x-5}; \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-9x+25+7(x-4)}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-22x+42-(3x-14)(x-3)}{(x-5)(x-3)}\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-9x+25+7x-28}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-22x+42-3x^2+23x-42}{(x-5)(x-3)}\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0, \\ \dfrac{-x^2+x}{(x-5)(x-3)}\geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)(x-4)}\leqslant 0, \\ \dfrac{-x(x-1)}{(x-5)(x-3)}\geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[0;1)\cup(3;4)$.

10. $\begin{cases} (x^2-6x+8)(x^2-6x+13)<24, \\ (x^2-x)(x^2-x+2)<48. \end{cases}$

Пусть $x^2-6x+8=t$ для первого неравенства и $x^2-x=z$ для второго неравенства.

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} t(t+5)<24, \\ z(z+2)<48; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2+5t-24<0, \\ z^2+2z-48<0; \end{cases}$$

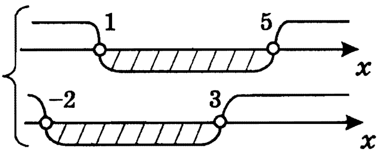
$$\begin{cases} (t+8)(t-3)<0, \\ (z+8)(z-6)<0. \end{cases}$$

Теперь вместо t и z вновь возвратимся к прежнему x:

$$\begin{cases} (x^2-6x+16)(x^2-6x+5)<0, \\ (x^2-x+8)(x^2-x-6)<0. \end{cases}$$

Так как $x^2 - 6x + 16 = (x-3)^2 + 7 > 0$ (при всех x) и $x^2 - x + 8 > 0$ (при всех x), учитывая, что $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)(x-1) < 0, \\ (x-3)(x+2) < 0. \end{cases}$



Ответ: $(1; 3)$.

Нахождение области определения

Практикум 3

Умение решать неравенства очень важно для нахождения областей определения выражения или функции. Например, для нахождения области определения функций, связанных с корнями.

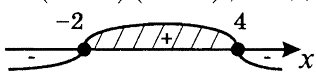
1. $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Очевидно, что квадратичный корень существует, если его подкоренное выражение неотрицательно,

т. е. $8 + 2x - x^2 \geqslant 0$.

Так как $8 + 2x - x^2 = 0$, то $x^2 - 2x - 8 = 0$, и по теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2, \end{array}\right.$

значит $-x^2 + 2x + 8 = -(x-4)(x+2)$, тогда

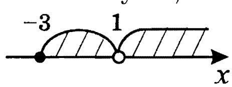
$-(x-4)(x+2) \geqslant 0$ 

$[-2; 4]$,

т. е. $D(y) = [-2; 4]$ — так обозначают область определения функции.

2. $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$.

Для существования функции необходимо, чтобы $x + 3 \geqslant 0$ и знаменатель не равнялся нулю,

т. е. $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \neq 1, \end{cases}$ 

тогда $D(y) = [-3; 1) \cup (1; \infty)$.

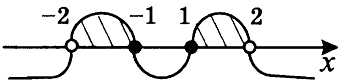
3. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{4 - x^2}$.

$D(y):$ $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-1) \geqslant 0, \\ (2+x)(2-x) \neq 0; \end{cases}$

$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; \infty)$.

4. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}}.$

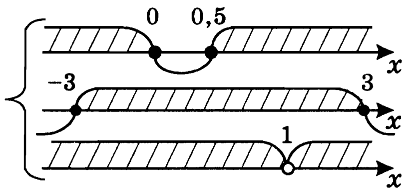
$D(y): \quad \dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2} \geqslant 0. \quad \dfrac{(x+1)(x-1)}{(2+x)(2-x)} \geqslant 0.$

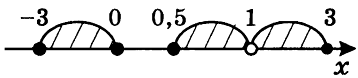


$D(y) = (-2; -1] \cup [1; 2).$

5. $y = \sqrt{2x^2 - x} + \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}.$

$$D(y): \quad \begin{cases} 2x^2 - x \geqslant 0, \\ 9 - x^2 \geqslant 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(2x - 1) \geqslant 0, \\ (3 + x)(3 - x) \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

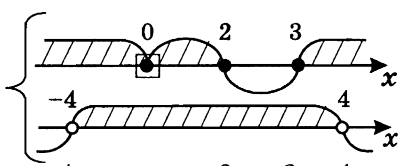


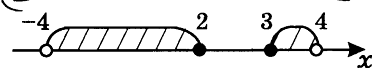


$D(y) = [-3; 0] \cup [0,5; 1) \cup (1; 3].$

6. $y = \sqrt{x^2(x^2 - 5x + 6)} + \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}.$

$$D(y): \quad \begin{cases} x^2\left(x^2 - 5x + 6\right) \geqslant 0, \\ 16 - x^2 > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2(x - 3)(x - 2) \geqslant 0, \\ (4 - x)(4 + x) > 0. \end{cases}$$





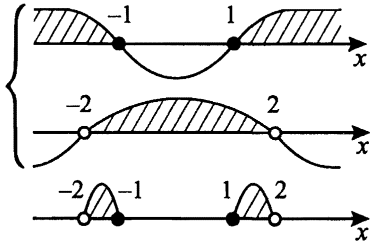
$D(y) = (-4; 2] \cup [3; 4).$

7. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4 - x^2}}.$

$$D(y):\ \begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0, \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) \geqslant 0, \\ (2-x)(2+x) > 0. \end{cases}$$

$D(y) = (-2; -1] \cup [1; 2).$

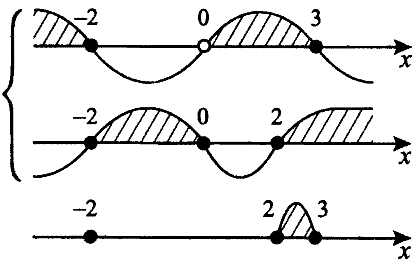


Примечание. Сравните с примером **4**.

8. $y = \sqrt{1 - x + \dfrac{6}{x}} \cdot \sqrt[4]{x^3 - 4x}.$

$$D(y):\ \begin{cases} 1 - x + \dfrac{6}{x} \geqslant 0, \\ x^3 - 4x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - x^2 + 6}{x} \geqslant 0, \\ x(x^2 - 4) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-(x-3)(x+2)}{x} \geqslant 0, \\ x(x-2)(x+2) \geqslant 0. \end{cases}$$



$D(y) = [2; 3] \cup \{-2\}.$

Тренировочная работа 4

Найдите область определения.

1. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$.

2. $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.

3. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2-1} + \sqrt{4-x}$.

4. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{3-x}$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{7x^2-8x+1}{x^2-9}} + \dfrac{1}{x^2-16}$.

6. $y = \sqrt{2x - \dfrac{1}{x} - 1} + \sqrt{\dfrac{6}{x} - x + 1}$.

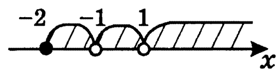
7. $y = \sqrt{\dfrac{7x^2-10x+3}{7x-3} - \dfrac{3}{2x-3}}$.

8. $y = \sqrt{\dfrac{4x+1}{4x^2+5x+1} - 2x - 1}$.

Решение тренировочной работы 4

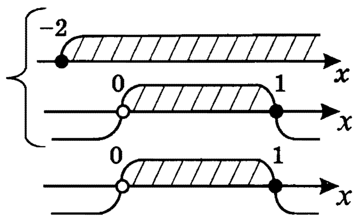
Найдите область определения.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$. $D(y)$: $\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x^2-1\neq 0. \end{cases}$



$D(y)=[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.

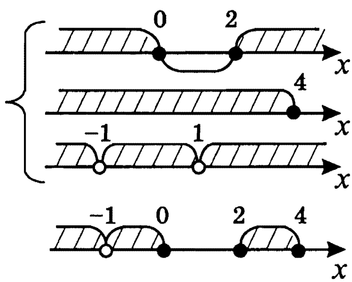
2. $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.



$D(y)$: $\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ \dfrac{1-x}{x}\geqslant 0. \end{cases}$

$D(y)=(0;1]$.

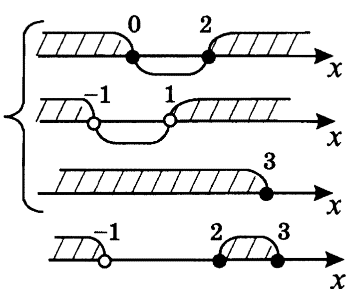
3. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2-1}+\sqrt{4-x}$.



$D(y)$: $\begin{cases} x^2-2x\geqslant 0, \\ 4-x\geqslant 0, \\ x^2-1\neq 0. \end{cases}$

$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[2;4]$.

4. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{3-x}$.



$D(y)$: $\begin{cases} x^2-2x\geqslant 0, \\ x^2-1>0, \\ 3-x\geqslant 0. \end{cases}$

$D(y)=(-\infty;-1)\cup[2;3]$.

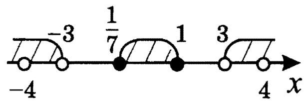
5. $y=\sqrt{\dfrac{7x^2-8x+1}{x^2-9}}+\dfrac{1}{x^2-16}$.

$D(y)$: $\begin{cases} \dfrac{7x^2-8x+1}{x^2-9}\geqslant 0, \\ x^2-16\neq 0. \end{cases}$ $7x^2-8x+1=0;$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-7}}{7} = \frac{4 \pm 3}{7}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{7}; \end{array}\right.$$

$$7x^2 - 8x + 1 = 7(x-1)\left(x - \frac{1}{7}\right).$$

$$\begin{cases} \dfrac{7(x-1)\left(x-\frac{1}{7}\right)}{(x+3)(x-3)} \geqslant 0, \\ (x+4)(x-4) \neq 0. \end{cases}$$



$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -3) \cup \left[\frac{1}{7}; 1\right] \cup (3; 4) \cup (4; \infty).$$

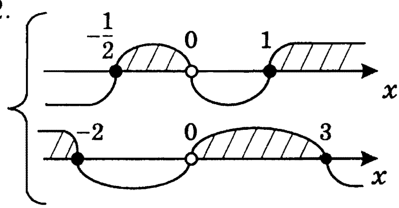
6. $y = \sqrt{2x - \dfrac{1}{x} - 1} + \sqrt{\dfrac{6}{x} - x + 1}.$

$$D(y): \quad \begin{cases} 2x - \dfrac{1}{x} - 1 \geqslant 0, \\ \dfrac{6}{x} - x + 1 \geqslant 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x} \geqslant 0, \\ \dfrac{6 + x - x^2}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

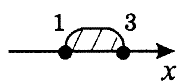
$$2x^2 - x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$-x^2 + x + 6 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x} \geqslant 0, \\ \dfrac{-(x-3)(x+2)}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$



$$D(y) = [1; 3].$$



7. $y = \sqrt{\dfrac{7x^2 - 10x + 3}{7x - 3} - \dfrac{3}{2x - 3}}.$

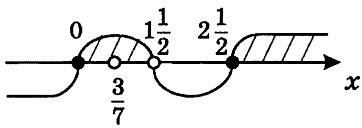
$$D(y): \quad \frac{7x^2 - 10x + 3}{7x - 3} - \frac{3}{2x - 3} \geqslant 0.$$

$$7x^2 - 10x + 3 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 21}}{7} = \frac{5 \pm 2}{7}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{7}; \end{array}\right.$$

$7x^2-10x+3=(x-1)(7x-3)$. $\dfrac{(7x-3)(x-1)}{7x-3}-\dfrac{3}{2x-3}\geqslant 0;$

$$\begin{cases} x-1-\dfrac{3}{2x-3}\geqslant 0, \\ 7x-3\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-1)(2x-3)-3}{2x-3}\geqslant 0, \\ x\neq \dfrac{3}{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-5x}{2x-3}\geqslant 0, \\ x\neq \dfrac{3}{7}. \end{cases}$$



$$D(y)=\left[0;\frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{7};1\frac{1}{2}\right)\cup\left[2\frac{1}{2};\infty\right).$$

8. $y=\sqrt{\dfrac{4x+1}{4x^2+5x+1}-2x-1}.$

$D(y):\quad \dfrac{4x+1}{4x^2+5x+1}-2x-1\geqslant 0.\quad 4x^2+5x+1=0;$

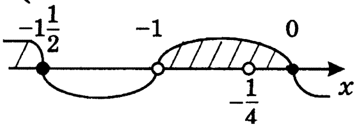
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{-5\pm 3}{8};\qquad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{4}; \end{array}\right.$$

$$4x^2+5x+1=4(x+1)\left(x+\frac{1}{4}\right)=(x+1)(4x+1);$$

$$\frac{4x+1}{(x+1)(4x+1)}-2x-1\geqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-(2x+1)\geqslant 0, \\ x\neq -\dfrac{1}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1-(2x+1)(x+1)}{x+1}\geqslant 0, \\ x\neq -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1-2x^2-3x-1}{x+1}\geqslant 0, \\ x\neq -\dfrac{1}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-x(2x+3)}{x+1}\geqslant 0, \\ x\neq -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$



$$D(y)=\left(-\infty;-1\frac{1}{2}\right]\cup\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right].$$

Решение более сложных неравенств

Тренировочная работа 5

1. $\dfrac{3x^2-7x+2}{2-6x} \geqslant 0.$

2. $\dfrac{3x^2(x-5)}{-3x^2+5x-11} > 0.$

3. $\dfrac{(2x^2-7x-15)(2x^3+3x^2-8x-12)}{(15x^2+7x-2)(-3x^2-12x+63)} \geqslant 0.$

4. $\begin{cases} (1-\sqrt{3})x \leqslant (\sqrt{3}-1)^2, \\ \sqrt{243}x+9 \leqslant 0. \end{cases}$

5. $\dfrac{x+40}{x^3-16x} : \left(\dfrac{x-4}{3x^2+11x-4} - \dfrac{16}{16-x^2}\right) \leqslant 0.$

6. $\begin{cases} x^2+5x<0, \\ \dfrac{x^2+9x+18}{-x^2-5x-6} \leqslant 2. \end{cases}$

7. $\dfrac{9x^2-4}{2x^2-5x+2} \cdot \dfrac{x-2}{3x+2} + \dfrac{x}{1-2x} \geqslant 0.$

8. $\dfrac{(3x^2-x-24)(36-12x+x^2)}{(27+3x-2x^2)(2x^2+2x-24)} \leqslant 0.$

9. $\dfrac{3-x}{2x^2-11x+5} \leqslant \dfrac{3-x}{2x^2+15x+25}.$

10. $\dfrac{x^4-x^2-2x-1}{x^2-(2-\sqrt{7})x-2\sqrt{7}} \leqslant 0.$

Решение тренировочной работы 5

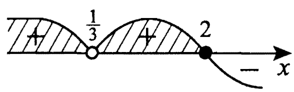
1. $\dfrac{3x^2-7x+2}{2-6x} \geqslant 0.$

$3x^2-7x+2=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\dfrac{7\pm 5}{6};\qquad \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=\dfrac{1}{3};\end{array}\right.$

$3x^2-7x+2=3(x-2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=(x-2)(3x-1).$

$\dfrac{(x-2)(3x-1)}{2(1-3x)} \geqslant 0$



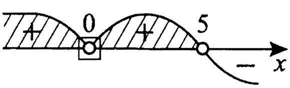
Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};2\right].$

2. $\dfrac{3x^2(x-5)}{-3x^2+5x-11} > 0.$

$-3x^2+5x-11=0;\quad 3x^2-5x+11=0;$

$\begin{cases} D=25-12\cdot 11<0,\\ a=3>0;\end{cases}\qquad 3x^2-5x+11>0\ \text{ (при всех } x).$

Поэтому $\dfrac{3x^2(x-5)}{-3x^2+5x-11} > 0 \Leftrightarrow -3x^2(x-5)>0$



Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;5).$

3. $\dfrac{(2x^2-7x-15)(2x^3+3x^2-8x-12)}{(15x^2+7x-2)(-3x^2-12x+63)} \geqslant 0.$

а) $2x^2-7x-15=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+120}}{4}=\dfrac{7\pm 13}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=5\\ x=-1{,}5;\end{array}\right.$

$2x^2-7x-15=2(x+1{,}5)(x-5)=(2x+3)(x-5);$

б) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = x^2(2x+3) - 4(2x+3) =$
$= (2x+3)(x^2-4) = (2x+3)(x+2)(x-2).$

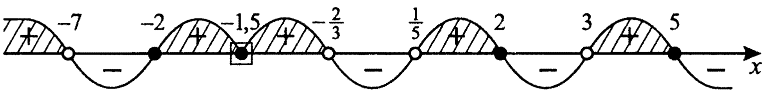
в) $15x^2 + 7x - 2 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{30} = \frac{-7 \pm 13}{30}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{1}{5}; \end{array}\right.$$

$$15x^2+7x-2 = 15\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) = (3x+2)(5x-1).$$

г) $3x^2 + 12x - 63 = 0;$
$x^2 + 4x - 21 = 0;$
$-3x^2 - 12x + 63 = -3(x+7)(x-3).$

$$\frac{(2x+3)(x-5)(2x+3)(x+2)(x-2)}{-(3x+2)(5x-1)3(x+7)(x-3)} \geqslant 0$$

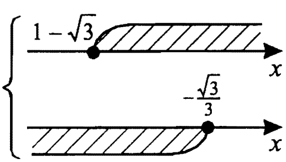


Ответ: $(-\infty; -7) \cup \left[-2; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{5}; 2\right] \cup (3; 5]$.

4. $\begin{cases} (1-\sqrt{3})\,x \leqslant (\sqrt{3}-1)^2, \\ \sqrt{243}x + 9 \leqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-\sqrt{3})\,x \leqslant (\sqrt{3}-1)^2, \\ 9\sqrt{3}x + 9 \leqslant 0. \end{cases}$

$1 - \sqrt{3} < 0$, тогда $\begin{cases} x \geqslant 1 - \sqrt{3}, \\ x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(1 - \sqrt{3}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \geqslant 0.$$



Ответ: $\left[1-\sqrt{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

5. $\dfrac{x+40}{x^3-16x} : \left(\dfrac{x-4}{3x^2+11x-4} - \dfrac{16}{16-x^2}\right) \leqslant 0.$

$3x^2+11x-4=0;$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{6} = \frac{-11 \pm 13}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = -4. \end{array}\right.$$

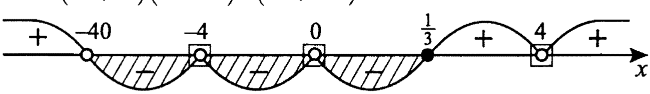
$$3x^2+11x-4 = 3(x+4)\left(x-\frac{1}{3}\right) = (x+4)(3x-1).$$

$$\frac{x-4}{(x+4)(3x-1)} - \frac{16}{(4-x)(x+4)} = \frac{(x-4)^2+16(3x-1)}{(x+4)(x-4)(3x-1)} =$$

$$= \frac{x^2-8x+16+48x-16}{(x+4)(x-4)(3x-1)} = \frac{x(x+40)}{(x+4)(x-4)(3x-1)}, \text{ тогда}$$

$$\frac{x+40}{x(x+4)(x-4)} : \frac{x(x+40)}{(x+4)(x-4)(3x-1)} \leqslant 0;$$

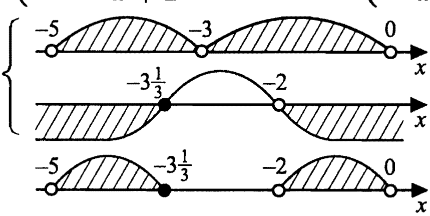
$$\frac{(x+40)(x+4)(x-4)(3x-1)}{x(x+4)(x-4)x(x+40)} \leqslant 0.$$



Ответ: $(-40;-4) \cup (-4;0) \cup \left(0;\dfrac{1}{3}\right].$

6. $\begin{cases} x^2+5x<0, \\ \dfrac{x^2+9x+18}{-x^2-5x-6} \leqslant 2; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x(x+5)<0, \\ \dfrac{(x+3)(x+6)}{-(x+3)(x+2)} \leqslant 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+5)<0, \\ x \neq -3, \\ \dfrac{-x-6-2x-4}{x+2} \leqslant 0; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x(x+5)<0, \\ x \neq -3, \\ \dfrac{-3x-10}{x+2} \leqslant 0. \end{cases}$

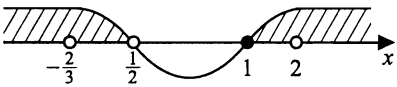


Ответ: $\left(-5;-3\dfrac{1}{3}\right] \cup (-2;0).$

7. $\dfrac{9x^2-4}{2x^2-5x+2}\cdot\dfrac{x-2}{3x+2}+\dfrac{x}{1-2x}\geqslant 0.$

$\dfrac{(3x+2)(3x-2)(x-2)}{(2x-1)(x-2)(3x+2)}-\dfrac{x}{2x-1}\geqslant 0;$

$\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}(3x-2-x)\geqslant 0,\\ x\neq-\dfrac{2}{3},\\ x\neq 2;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{2(x-1)}{2x-1}\geqslant 0,\\ x\neq-\dfrac{2}{3},\\ x\neq 2.\end{cases}$



Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup[1;2)\cup(2;\infty).$

8. $\dfrac{(3x^2-x-24)(36-12x+x^2)}{(27+3x-2x^2)(2x^2+2x-24)}\leqslant 0.$

а) $3x^2-x-24=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+288}}{6}=\dfrac{1\pm 17}{6};\qquad \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-\dfrac{8}{3};\end{array}\right.$

$3x^2-x-24=3(x-3)\left(x+\dfrac{8}{3}\right)=(x-3)(3x+8).$

б) $36-12x+x^2=(6-x)^2=(x-6)^2.$

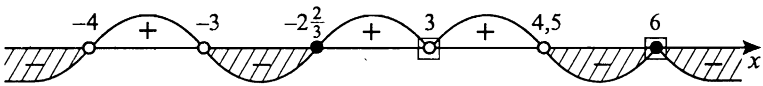
в) $-2x^2+3x+27=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+216}}{4}=\dfrac{3\pm 15}{4};\qquad \left[\begin{array}{l}x=4{,}5\\ x=-3;\end{array}\right.$

$-2x^2+3x+27=-2(x+3)(x-4{,}5)=-(x+3)(2x-9).$

г) $2x^2+2x-24=2(x^2+x-12)=2(x+4)(x-3).$

Тогда $\dfrac{(x-3)(3x+8)(x-6)^2}{-(x+3)(2x-9)\cdot 2(x+4)(x-3)}\leqslant 0.$



Ответ: $(-\infty;-4)\cup\left(-3;-2\dfrac{2}{3}\right]\cup(4{,}5;\infty)\,.$

9. $\dfrac{3-x}{2x^2-11x+5} \leqslant \dfrac{3-x}{2x^2+15x+25}$.

$$(3-x)\left(\frac{1}{2x^2-11x+5}-\frac{1}{2x^2+15x+25}\right) \leqslant 0.$$

а) $2x^2-11x+5=0$;

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{11\pm 9}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$2x^2-11x+5=2(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-5)(2x-1).$$

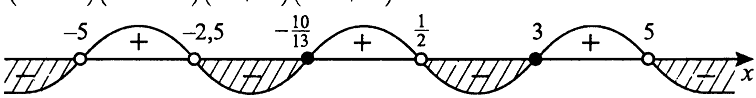
б) $2x^2+15x+25=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{225-200}}{4}=\frac{-15\pm 5}{4};\qquad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-\dfrac{5}{2}; \end{array}\right.$$

$$2x^2+15x+25=2(x+5)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x+5)(2x+5).$$

$$(3-x)\frac{(2x^2+15x+25-2x^2+11x-5)}{(x-5)(2x-1)(x+5)(2x+5)} \leqslant 0.$$

$$\frac{(3-x)(26x+20)}{(x-5)(2x-1)(x+5)(2x+5)} \leqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;-5)\cup\left(-2{,}5;-\dfrac{10}{13}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2};3\right]\cup(5;\infty)$.

10. $\dfrac{x^4-x^2-2x-1}{x^2-(2-\sqrt{7})x-2\sqrt{7}} \leqslant 0.$

а) $x^2-(2-\sqrt{7})x-2\sqrt{7}=0$;

$$x_{1,2}=\frac{2-\sqrt{7}\pm\sqrt{(2-\sqrt{7})^2+8\sqrt{7}}}{2}=\frac{2-\sqrt{7}\pm(2+\sqrt{7})}{2};$$

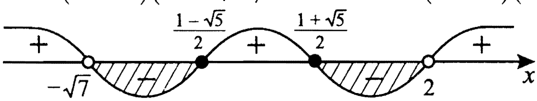
$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\sqrt{7}; \end{array}\right.\qquad x^2-(2-\sqrt{7})x-2\sqrt{7}=(x-2)(x+\sqrt{7}).$$

б) $x^4 - x^2 - 2x - 1 = \left(x^2\right)^2 - (x+1)^2 =$
$= (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1).$

$$x^2 - x - 1 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \end{array}\right.$$

$x^2 + x + 1 > 0 \quad$ (при всех x).

$$\frac{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x-2)(x+\sqrt{7})} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 1)}{(x-2)(x+\sqrt{7})} \leqslant 0.$$



Ответ: $\left(-\sqrt{7}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

Проверочная работа 3

1. $\dfrac{3x+7}{5-x^2}\cdot(x-3)^2\geqslant 0.$

2. $\dfrac{(3x-\sqrt{11})\big((\sqrt{3}-2)x-(2-\sqrt{3})^2\big)}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{32}x+4)}\leqslant 0.$

3. $\dfrac{(6x^2-5x-1)(16x^2+2x-5)}{(9x^2+6x+1)(-2x^2+x+3)}\leqslant 0.$

4. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2}+0{,}5\geqslant 0.$

5. $\dfrac{3x+9}{3x^2-4x+1}\geqslant\dfrac{6x+18}{6x^2+7x+1}.$

6. $(x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60\leqslant 0.$

7. $x(x+1)(x+2)(x+3)\geqslant 24.$

8. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{7}{x-3}\leqslant\dfrac{5}{x-6}.$

9. $\left(\dfrac{1-x}{3x^2-4x+1}-\dfrac{x+1}{2x^2-3x-5}\right)(6x^2-17x+5)\geqslant 0.$

10. $\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{12}{x^2+2x}\leqslant\dfrac{1}{x}.$

2 Модульные неравенства

Свойства модульных неравенств

1. $|\alpha| < \beta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta. \end{cases}$

Известно, что $|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases}$

т.е. это составное выражение.

Доказательство:

1) Пусть $\beta \leqslant 0$, следовательно $\alpha \in \emptyset$, так как $|a| \geqslant 0$ (при всех a).

2) Пусть $\beta > 0$:

а) пусть $\alpha \geqslant 0$, следовательно $|\alpha| = \alpha$, тогда

$$\begin{cases} \alpha \geqslant 0, \\ |\alpha| < \beta, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geqslant 0, \\ \alpha < \beta, \\ \beta > 0. \end{cases}$$

$[0; \beta)$;

б) пусть $\alpha < 0$, следовательно $|\alpha| = -\alpha$, тогда

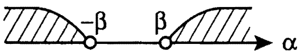
$$\begin{cases} \alpha < 0, \\ -\alpha < \beta, \\ \beta > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0, \\ \alpha > -\beta, \\ \beta > 0. \end{cases}$$

$(-\beta;0)$; и, так как $(-\beta;0)\cup[0;\beta)=(-\beta;\beta)$,

то $\begin{cases}\alpha<\beta\\ \alpha>-\beta,\end{cases}$ что и требовалось доказать, т.е.

$$|\alpha|<\beta\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha<\beta,\\ \alpha>-\beta.\end{cases}$$

2. $|\alpha|>\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha>\beta\\ \alpha<-\beta.\end{array}\right.$



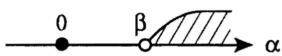
1) $\beta<0$ $|\alpha|>\beta$ (при всех α);

2) $\beta=0$ $|\alpha|>\beta$ (при всех α, кроме $\alpha=0$);

3) $\beta>0$

а) $\alpha\geqslant0$, следовательно $|\alpha|=\alpha$, тогда

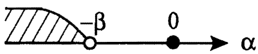
$$\begin{cases}\beta>0,\\ \alpha\geqslant0,\\ |\alpha|>\beta;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta>0,\\ \alpha\geqslant0,\\ \alpha>\beta.\end{cases}$$



$(\beta;+\infty)$;

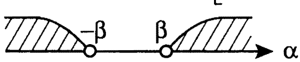
б) $\alpha<0$, следовательно $|\alpha|=-\alpha$, тогда

$$\begin{cases}|\alpha|>\beta,\\ \alpha<0,\\ \beta>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha>\beta,\\ \alpha<0,\\ \beta>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha<-\beta,\\ \alpha<0,\\ \beta>0.\end{cases}$$



$(-\infty;-\beta)$, значит $(-\infty;-\beta)\cup(\beta;+\infty)$,

т. е. $|\alpha|>\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha>\beta\\ \alpha<-\beta.\end{array}\right.$



Примечание. При использовании I и II свойства равносильность не нарушается, даже если знак правой части отрицательный.

Действительно:

а) Пусть $|\alpha| < \beta \quad (\beta < 0)$ — очевидно, решения нет.

Если используется I свойство, то

$$|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \emptyset,$$

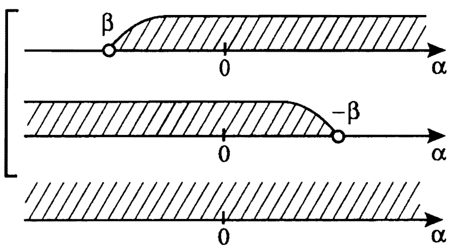
так как получается, что одно и то же число меньше нуля и одновременно больше его. Решения также нет.

б) Пусть $|\alpha| > \beta \quad (\beta < 0)$ — очевидно, решение есть любое α.

Если использовать II свойство, то

$$|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}.$$

Действительно, объединяя два случая (число α больше отрицательного числа β и меньше положительного числа $(-\beta)$), получаем



и имеем решение $\alpha \in \mathbb{R}$.

Практикум 4

Рассмотрим на примерах, как используются свойства.

1. $|x-2|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>2 \\ x-2<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<0. \end{array}\right.$

   Ответ: $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ — использовано II свойство.

2. $|x+2|<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2<2, \\ x+2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x>-4. \end{cases}$

   Ответ: $(-4;0)$ — использовано I свойство.

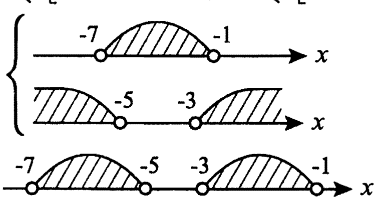
3. $||x+4|-2|<1.$

   Вначале используем I свойство

   $$\begin{cases} |x+4|-2<1, \\ |x+4|-2>-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+4|<3, \\ |x+4|>1; \end{cases}$$

   а затем I и II свойства

   $$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+4<3, \\ x+4>-3, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x+4>1 \\ x+4<-1; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, \\ x>-7, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x>-3 \\ x<-5; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} -7<x<-1, \\ \left[\begin{array}{l} x>-3 \\ x<-5. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



   Ответ: $(-7;-5)\cup(-3;-1)$.

4. $||x-4|-2|>1.$

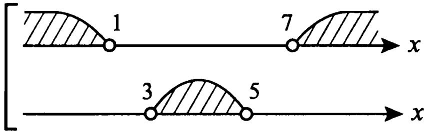
   Сначала используем II свойство

   $$\left[\begin{array}{l} |x-4|-2>1 \\ |x-4|-2<-1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-4|>3 \\ |x-4|<1. \end{array}\right.$$

   Используем свойства I и II

   $$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-4>3 \\ x-4<-3, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x-4<1, \\ x-4>-1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>7 \\ x<1, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x<5, \\ x>3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x > 7\\ x < 1,\end{array}\right.\\ 3 < x < 5\end{array}\right.$$

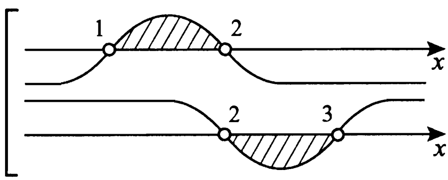


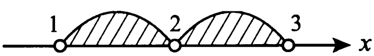
Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; 5) \cup (7; +\infty)$.

5. $\dfrac{1}{|2-x|} > 1;$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2-x} > 1\\ \dfrac{1}{2-x} < -1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{1-2+x}{2-x} > 0\\ \dfrac{1+2-x}{2-x} < 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2-x} > 0\\ \dfrac{3-x}{2-x} < 0.\end{array}\right.$$





Ответ: $(1; 2) \cup (2; 3)$.

6. $|x+2| - |x| > 0.$

$$|x+2| > |x|; \qquad \left[\begin{array}{l}x+2 > |x|\\ x+2 < -|x|;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}|x| < x+2\\ |x| < -x-2;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < x+2,\\ x > -x-2\end{cases}\\ \begin{cases}x < -x-2,\\ x > x+2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < 2,\\ x > -x-2\end{cases}\\ \begin{cases}x < -1,\\ 0 > 2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad x > -1.$$

Ответ: $(-1; \infty)$.

Но можно решать иначе.

$|x+2|>|x|$, так как обе части неравенства неотрицательны, можно возвести их в квадрат, не нарушая равносильности.

$|x+2|>|x| \Leftrightarrow (|x+2|)^2>(|x|)^2;$

$(x+2)^2-x^2>0.$

Очевидно, что $|x|^2=x^2$.

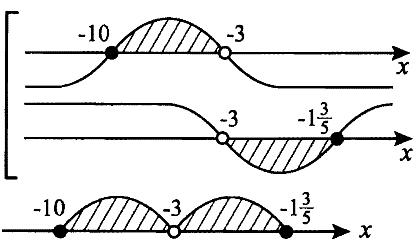
$(x+2+x)(x+2-x)>0;\ \ 2(x+1)\cdot 2>0 \Leftrightarrow x>-1.$

Ответ: $(-1;+\infty)$.

7. $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| \geqslant 3.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{x+3} \geqslant 3 \\ \dfrac{2x-1}{x+3} \leqslant -3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x-1-3(x+3)}{x+3} \geqslant 0 \\ \dfrac{2x-1+3(x+3)}{x+3} \leqslant 0; \end{array}\right.$$

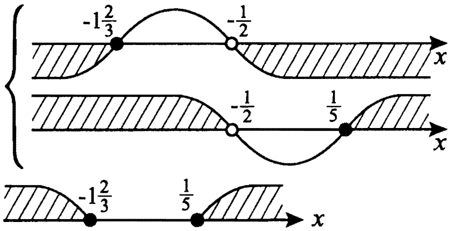
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-x-10}{x+3} \geqslant 0 \\ \dfrac{5x+8}{x+3} \leqslant 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $[-10;-3)\cup\left(-3;-1\dfrac{3}{5}\right]$.

8. $\left|\dfrac{x-3}{2x+1}\right| \leqslant 2.$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2x+1} \leqslant 2, \\ \dfrac{x-3}{2x+1} \geqslant -2; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-3-4x-2}{2x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-3+4x+2}{2x+1} \geqslant 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-3x-5}{2x+1} \leqslant 0, \\ \dfrac{5x-1}{2x+1} \geqslant 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$.

9. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x.$

По определению $|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3} \geqslant 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{x^2+x-12}{x-3} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2+x-12 = (x+4)(x-3);$

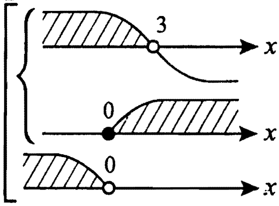
$\dfrac{(x+4)(x-3)}{x-3} \geqslant 2x$; сократим на $(x-3)$:

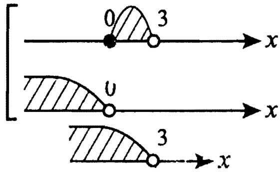
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-x-12-2x^2+6x}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x+4 \geqslant 2x, \\ x \neq 3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{-x^2+5x-12}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant 4; \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2 - 5x + 12 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -23 < 0. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{-1}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ x < 0. \end{array}\right.$$





Ответ: $(-\infty; 3)$.

10. $|x^2 + 2x - 1| < 2x + 3$.

а) Решать это неравенство по определению модуля можно, но технически весьма сложно. Нужно учесть, что если правая часть больше нуля, то обе части неравенства можно возвести в квадрат, а если правая часть меньше нуля, то решения нет, т.е.

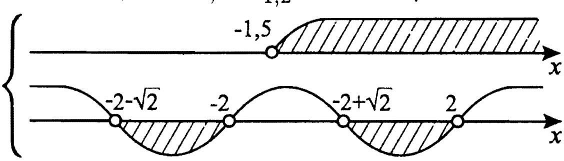
$$\boxed{|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha^2 < \beta^2. \end{cases}}$$

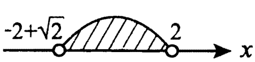
$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ (|x^2 + 2x - 1|)^2 < (2x+3)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1{,}5, \\ (x^2 + 2x - 1 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 1 - 2x - 3) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1{,}5, \\ (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4) < 0. \end{cases}$$

$x^2 + 4x + 2 = 0$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$.





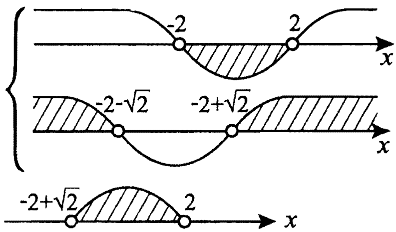
Ответ: $(-2 + \sqrt{2}; 2)$.

б) Второй способ решения — используем I свойство модульных неравенств.

$|x^2 + 2x - 1| < 2x + 3;$

$\begin{cases} x^2 + 2x - 1 < 2x + 3, \\ x^2 + 2x - 1 > -2x - 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x^2 + 4x + 2 > 0. \end{cases}$



Ответ: $(-2 + \sqrt{2}; 2)$.

11. а) $|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3.$

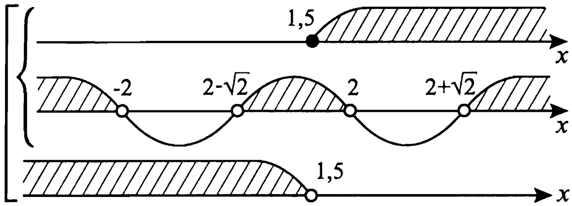
так как $\lvert\alpha\rvert > \beta \Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta \geqslant 0, \\ \alpha^2 > \beta^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta < 0, \\ \forall\alpha. \end{cases} \end{array}\right.$

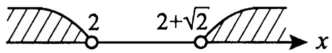
$|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0, \\ (|x^2 - 2x - 1|)^2 > (2x - 3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ \forall x; \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1{,}5, \\ (x^2 - 2x - 1 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 1 - 2x + 3) > 0 \end{cases} \\ x < 1{,}5; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1{,}5, \\ (x^2 - 4)(x^2 - 4x + 2) > 0 \end{cases} \\ x < 1{,}5. \end{array}\right.$



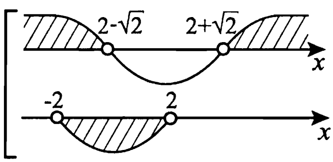


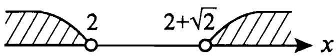
Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2+\sqrt{2}; +\infty)$.

б) Второй способ решения — используем II свойство модульных неравенств.

$|x^2 - 2x - 1| > 2x - 3;$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 > 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 1 < -2x + 3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ x^2 - 4 < 0. \end{array}\right.$$

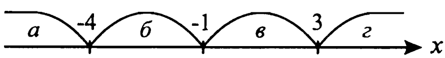




Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2+\sqrt{2}; +\infty)$.

12. $2|x-3| - |x+4| > |x+1| + 2$.

Найдем корни модулей: $|x-3| = 0$, $x = 3$; $|x+4| = 0$, $x = -4$; $|x+1| = 0$, $x = -1$.



Для решения такого неравенства рассмотрим его на каждом интервале отдельно. Корни модулей разбивают числовую ось на интервалы. Учитывая значения подмодульных выражений, раскроем значения модулей на каждом интервале.

$$\text{а)} \begin{cases} x < -4, & \begin{pmatrix} x+4 < 0 & |x+4| = -x-4 \\ x+1 < 0 & |x+1| = -x-1 \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \\ 2(3-x) - (-x-4) > -(x+1) + 2; \end{cases}$$

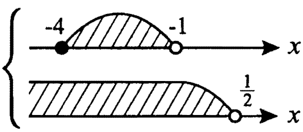
$$\begin{cases} x < -4, \\ 6 - 2x + x + 4 > -x - 1 + 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -4, \\ 10 > 1. \end{cases}$$

$(-\infty; -4)$.

б) $$\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -1, \\ 2(3 - x) - (x + 4) > -x - 1 + 2; \end{cases} \left(\begin{array}{ll} x + 4 \geqslant 0 & |x + 4| = x + 4 \\ x + 1 < 0 & |x + 1| = -x - 1 \\ x - 3 < 0 & |x - 3| = 3 - x \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -1, \\ 6 - 2x - x - 4 > -x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -1, \\ -2x > -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -4, \\ x < -1, \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



$[-4; -1)$.

в) $$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 3, \\ 2(3 - x) - (x + 4) > x + 1 + 2; \end{cases} \left(\begin{array}{ll} x + 1 \geqslant 0 & |x + 1| = x + 1 \\ x - 3 < 0 & |x - 3| = 3 - x \\ x + 4 > 0 & |x + 4| = x + 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 3, \\ 6 - 2x - x - 4 > x + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 3, \\ -4x > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 3, \\ x < -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

$\left[-1; -\dfrac{1}{4}\right)$.

$$\text{г)}\ \begin{cases} x \geqslant 3, & \begin{pmatrix} x-3 \geqslant 0 & |x-3| = x-3 \\ x+4 > 0 & |x+4| = x+4 \\ x+1 > 0 & |x+1| = x+1 \end{pmatrix} \\ 2(x-3) - (x+4) > x+1+2; \end{cases}$$

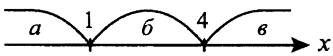
$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ 2x - 6 - x - 4 > x + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ -10 > 3; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Объединяя все решения, имеем $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$.

13. $\dfrac{3x-2}{|x-1| + |x-4|} \geqslant 2.$

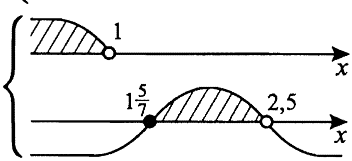


$$\text{а)}\ \begin{cases} x < 1, & \begin{pmatrix} x-1 < 0 & |x-1| = 1-x \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ \dfrac{3x-2}{1-x+4-x} \geqslant 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{3x-2}{-2x+5} \geqslant 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{3x-2+4x-10}{5-2x} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{7x-12}{5-2x} \geqslant 0. \end{cases}$$



Решений нет.

б) $$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 4, \\ \dfrac{3x-2}{x-1+4-x} \geqslant 2; \end{cases} \left(\begin{matrix} x-1 \geqslant 0 & |x-1| = x-1 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 4, \\ \dfrac{3x-2}{3} \geqslant 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 4, \\ 3x-2 \geqslant 6; \end{cases}$$

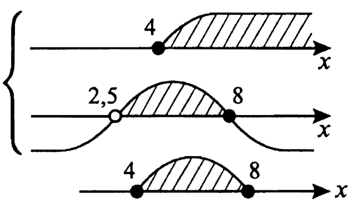
$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 4, \\ x \geqslant \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\left[2\frac{2}{3}; 4\right).$$

в) $$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ \dfrac{3x-2}{x-1+x-4} \geqslant 2; \end{cases} \left(\begin{matrix} x-4 \geqslant 0 & |x-4| = x-4 \\ x-1 > 0 & |x-1| = x-1 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ \dfrac{3x-2}{2x-5} \geqslant 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \dfrac{3x-2-4x+10}{2x-5} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ \dfrac{8-x}{2x-5} \geqslant 0. \end{cases}$$



$[4; 8]$.

Объединяя все решения, имеем

$$\left[2\frac{2}{3}; 4\right) \cup [4; 8] = \left[2\frac{2}{3}; 8\right].$$

Ответ: $\left[2\dfrac{2}{3}; 8\right]$.

Итак, осмысливая практикум, отметим свойства, которые полезно иметь в виду при решении модульных неравенств.

I. $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta. \end{cases}$

II. $|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta. \end{array}\right.$

III. $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0, \\ \alpha^2 < \beta^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \beta > 0, \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0. \end{cases}$

IV. $|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta \geqslant 0, \\ \alpha^2 > \beta^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta < 0, \\ \forall \alpha \end{cases} \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \beta \geqslant 0, \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta < 0, \\ \forall \alpha. \end{cases} \end{array}\right.$

V. $|\alpha| > |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2.$

VI. $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2.$

Тренировочная работа 6

Решите неравенство.

1. $|x^2 + 5x| < 6.$

2. $|x^2 - 5x| \geqslant 6.$

3. $\dfrac{|x+3| - 2}{x+2} \geqslant 2.$

4. $\dfrac{|x-3| - 1}{|x| - 1} \leqslant 2.$

5. $x^2 - |3x + 2| + x \geqslant 0.$

6. $\dfrac{|x^2 - x - 12|}{x - 3} \geqslant 2x.$

7. $\dfrac{x^2 + 9x + 18}{|x^2 + 5x| - 6} \leqslant 2.$

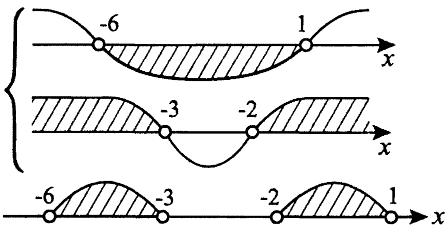
8. $\dfrac{4x^2 + 13x + 10}{|4x + 5|} \geqslant \dfrac{1}{2x + 3}.$

9. $|x + 3| + 2|x - 1| \leqslant |x| + 7.$

Решение тренировочной работы 6

1. $|x^2+5x|<6$. $\begin{cases} x^2+5x<6, \\ x^2+5x>-6; \end{cases}$

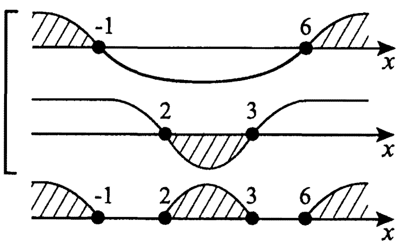
$\begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x^2+5x+6>0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+6)(x-1)<0, \\ (x+2)(x+3)>0. \end{cases}$



Ответ: $(-6;-3)\cup(-2;1)$.

2. $|x^2-5x|\geqslant 6$. $\left[\begin{array}{l} x^2-5x\geqslant 6 \\ x^2-5x\leqslant -6; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-5x-6\geqslant 0 \\ x^2-5x+6\leqslant 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (x-6)(x+1)\geqslant 0 \\ (x-2)(x-3)\leqslant 0. \end{array}\right.$

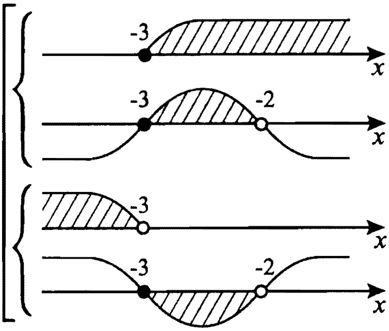


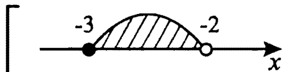
Ответ: $(-\infty;-1]\cup[2;3]\cup[6;\infty)$.

3. $\dfrac{|x+3|-2}{x+2}\geqslant 2$.

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ \dfrac{x+3-2}{x+2}\geqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3<0, \\ \dfrac{-x-3-2}{x+2}\geqslant 2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant -3, \\ \dfrac{x+1}{x+2}\geqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{-x-5}{x+2}\geqslant 2; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant -3,\\ \dfrac{x+1-2x-4}{x+2} \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < -3,\\ \dfrac{2x+4+x+5}{x+2} \leqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant -3,\\ \dfrac{-(x+3)}{x+2} \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < -3,\\ \dfrac{3(x+3)}{x+2} \leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

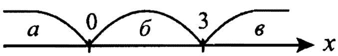




нет решений

Ответ: $[-3; -2)$.

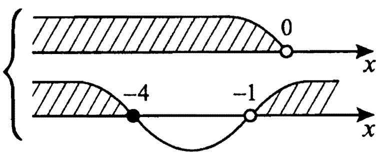
4. $\dfrac{|x-3|-1}{|x|-1} \leqslant 2.$



а) $\begin{cases}x < 0 \quad (|x| = -x; \quad |x-3| = 3-x),\\ \dfrac{3-x-1}{-x-1} \leqslant 2;\end{cases}$

$$\begin{cases}x < 0,\\ \dfrac{2-x+2x+2}{-x-1} \leqslant 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x < 0,\\ \dfrac{4+x}{-(x+1)} \leqslant 0;\end{cases}$$

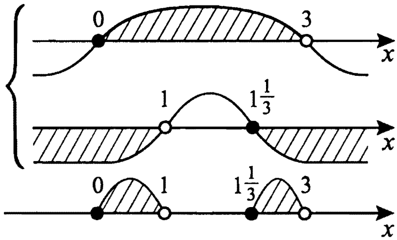
$$\begin{cases}x < 0,\\ \dfrac{x+4}{x+1} \geqslant 0;\end{cases}$$



$-1 < x < 0,\ x \leqslant -4.$

б) $\begin{cases}x \geqslant 0 \quad (|x| = x),\\ x < 3 \quad (|x-3| = 3-x),\\ \dfrac{3-x-1}{x-1} \leqslant 2;\end{cases}$

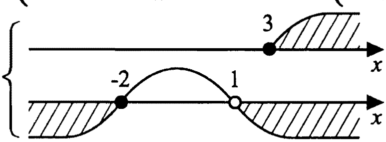
$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 3, \\ \dfrac{2 - x - 2x + 2}{x - 1} \leqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 3, \\ \dfrac{4 - 3x}{x - 1} \leqslant 0; \end{cases}$$



$0 \leqslant x < 1;\ 1\dfrac{1}{3} \leqslant x < 3.$

в) $\begin{cases} x \geqslant 3 \quad (|x| = x;\ |x - 3| = x - 3), \\ \dfrac{x - 3 - 1}{x - 1} \leqslant 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x - 4 - 2x + 2}{x - 1} \leqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{-(x + 2)}{x - 1} \leqslant 0; \end{cases}$$



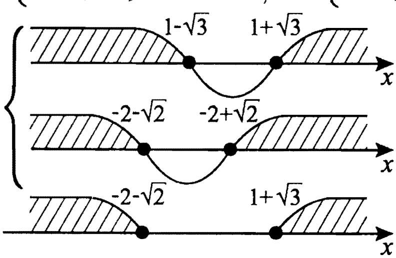
$x \geqslant 3.$

Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-1; 1) \cup \left[1\dfrac{1}{3}; \infty\right)$.

5. $x^2 - |3x + 2| + x \geqslant 0. \quad |3x + 2| \leqslant x^2 + x,$

учитывая свойство $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha > -\beta, \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2 \leqslant x^2 + x, \\ 3x + 2 \geqslant -x^2 - x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{3}; \infty)$.

6. $\dfrac{|x^2-x-12|}{x-3} \geqslant 2x.$

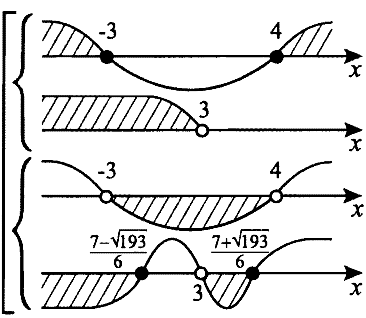
$y = x^2 - x - 12.$

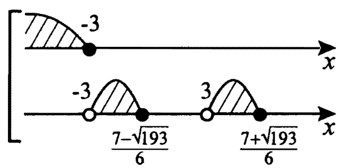
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-x-12 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3} \geqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x-12 < 0, \\ \dfrac{-(x^2-x-12)}{x-3} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-6x-x^2+x+12}{x-3} \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-4)(x+3) < 0, \\ \dfrac{2x^2-6x+x^2-x-12}{x-3} \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-5x+12}{x-3} \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-4)(x+3) < 0, \\ \dfrac{3x^2-7x-12}{x-3} \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ x < 3, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-4)(x+3) < 0, \\ \dfrac{3x^2-7x-12}{x-3} \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2 - 5x + 12 > 0$ при всех x.

$3x^2 - 7x - 12 = 0; \qquad x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+144}}{6} = \dfrac{7 \pm \sqrt{193}}{6}.$



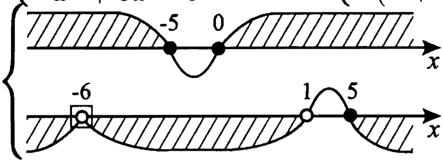


Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{7-\sqrt{193}}{6}\right] \cup \left(3; \dfrac{7+\sqrt{193}}{6}\right].$

7. $\dfrac{x^2+9x+18}{|x^2+5x|-6} \leqslant 2.$

а) $\begin{cases} x^2+5x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2+9x+18}{x^2+5x-6} \leqslant 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+5) \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2+9x+18-2x^2-10x+12}{x^2+5x-6} \leqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x(x+5) \geqslant 0, \\ \dfrac{-x^2-x+30}{x^2+5x-6} \leqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+5) \geqslant 0, \\ \dfrac{-(x+6)(x-5)}{(x+6)(x-1)} \leqslant 0. \end{cases}$$

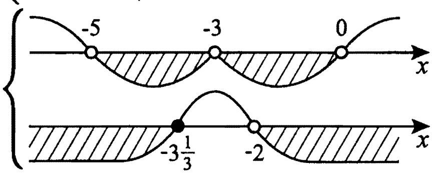


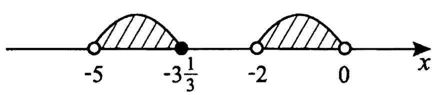
$(-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup [0; 1) \cup [5; +\infty)$.

б) $\begin{cases} x^2+5x < 0, \\ \dfrac{x^2+9x+18}{-x^2-5x-6} \leqslant 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+5) < 0, \\ \dfrac{(x+3)(x+6)}{-(x+2)(x+3)} \leqslant 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \dfrac{-(x+6)}{x+2} \leqslant 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \dfrac{-x-6-2x-4}{x+2} \leqslant 0; \end{cases}$$

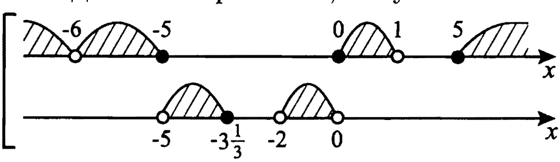
$$\begin{cases} x(x+5) < 0, \\ x \neq -3, \\ \dfrac{-3x-10}{x+2} \leqslant 0. \end{cases}$$

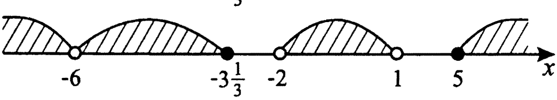




$\left(-5; -3\dfrac{1}{3}\right] \cup (-2; 0)$.

Объединяя оба решения, получим





Ответ: $(-\infty; -6) \cup \left(-6; -3\dfrac{1}{3}\right] \cup (-2; 1) \cup [5; \infty)$.

8. $\dfrac{4x^2+13x+10}{|4x+5|} \geqslant \dfrac{1}{2x+3}$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+5>0 \quad (|4x+5|=4x+5),\\ \dfrac{4x^2+13x+10}{4x+5} \geqslant \dfrac{1}{2x+3},\end{cases}\\ \begin{cases}4x+5<0 \quad (|4x+5|=-4x-5),\\ -\dfrac{4x^2+13x+10}{4x+5} \geqslant \dfrac{1}{2x+3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

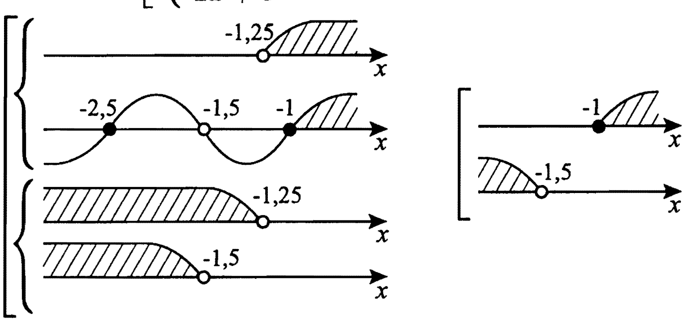
Так как $4x^2+13x+10=(4x+5)(x+2)$, то

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1{,}25,\\ x+2-\dfrac{1}{2x+3} \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1{,}25,\\ \dfrac{1}{2x+3}+x+2 \leqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1{,}25,\\ \dfrac{2x^2+7x+5}{2x+3} \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1{,}25,\\ \dfrac{2x^2+7x+7}{2x+3} \leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$2x^2+7x+5=(x+1)(2x+5)$.

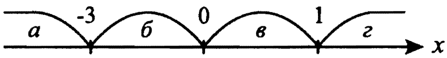
$2x^2+7x+7>0$ (при всех x), так как $\begin{cases}D=49-56<0,\\ a=2>0.\end{cases}$

Поэтому $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1{,}25,\\ \dfrac{(x+1)(2x+5)}{2x+3} \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1{,}25,\\ \dfrac{1}{2x+3} \leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$



Ответ: $(-\infty; -1{,}5) \cup [-1; \infty)$.

9. $|x+3| + 2|x-1| \leqslant |x| + 7.$



а) $\left\{\begin{array}{l} x < -3, \quad \left(\begin{array}{l} |x+3| = -x-3 \\ |x| = -x \\ |x-1| = -x+1 \end{array}\right) \\ -x-3-2x+2 \leqslant -x+7; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x < -3, \\ 2x \geqslant -8; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x < -3, \\ x \geqslant -4; \end{array}\right. \quad [-4;-3).$

б) $\left\{\begin{array}{l} -3 \leqslant x < 0, \quad \left(\begin{array}{l} |x+3| = x+3 \\ |x| = -x \\ |x-1| = -x+1 \end{array}\right) \\ x+3-2x+2 \leqslant -x+7; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} -3 \leqslant x < 0, \\ 5 \leqslant 7; \end{array}\right. \quad [-3;0).$

в) $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1, \quad \left(\begin{array}{l} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \\ |x-1| = 1-x \end{array}\right) \\ x+3-2x+2 \leqslant x+7; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1, \\ 2x \geqslant -2; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1, \\ x \geqslant -1; \end{array}\right. \quad [0;1).$

г) $\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1, \quad \left(\begin{array}{l} |x+3| = x+3 \\ |x| = x \\ |x-1| = x-1 \end{array}\right) \\ x+3+2x-2 \leqslant x+7; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ 2x \leqslant 6; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 3; \end{array}\right. \quad [1;3].$

Объединяя все решения, получим: $[-4;3]$.

Ответ: $[-4;3]$.

Тренировочная работа 7 (Нахождение области определения)

Найдите область определения.

1. $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 1}$.

2. $y = \dfrac{\sqrt{\frac{12}{x} - x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

3. $y = \dfrac{\sqrt{|x| - 2}}{9 - x^2}$.

4. $y = \sqrt{|x + 1| - 1} + \sqrt{9 - |x|^2}$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 4}{|x - 2| - 1}}$.

6. $y = \sqrt{-\dfrac{3x^2 + 2|x| - 5}{8x^2 - 6|x| + 1}}$.

7. $y = \sqrt{2 - \left|\dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 - 5x + 3}\right|}$.

8. $y = \sqrt{\dfrac{|x^2 - x - 6|}{x + 3} - 2x}$.

9. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4|x| + 3}{|x + 2| - 1}}$.

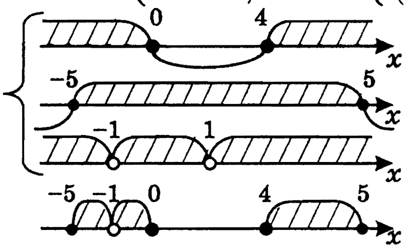
10. $y = \sqrt{\dfrac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|} - \dfrac{1}{2x - 3}}$.

Решение тренировочной работы 7

Найдите область определения.

1. $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \dfrac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 1}$.

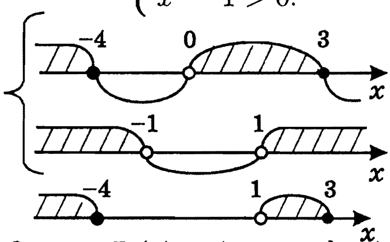
$D(y):\quad \begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ 25 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 \neq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-4) \geqslant 0, \\ (5+x)(5-x) \geqslant 0, \\ (x+1)(x-1) \neq 0; \end{cases}$



Ответ: $D(y) = [-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [4; 5]$.

2. $y = \dfrac{\sqrt{\frac{12}{x} - x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$D(y):\quad \begin{cases} \dfrac{12}{x} - x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{12 - x - x^2}{x} \geqslant 0, \\ (x+1)(x-1) > 0; \end{cases}$



Ответ: $D(y) = (-\infty; -4] \cup (1; 3]$.

3. $y = \dfrac{\sqrt{|x| - 2}}{9 - x^2}$.

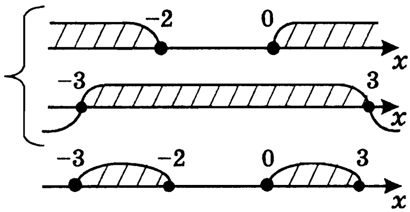
$D(y):\quad \begin{cases} |x| - 2 \geqslant 0, \\ 9 - x^2 \neq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -2, \end{array} \right. \\ (3+x)(3-x) \neq 0; \end{cases}$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [2; 3) \cup (3; \infty)$.

4. $y = \sqrt{|x+1|-1} + \sqrt{9-|x|^2}$.

$D(y):\quad \begin{cases} |x+1|-1 \geqslant 0, \\ 9-|x|^2 \geqslant 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+1 \geqslant 1 \\ x+1 \leqslant -1, \end{array}\right. \\ 9-x^2 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ x \leqslant -2, \end{array}\right. \\ (3+x)(3-x) \geqslant 0; \end{cases}$

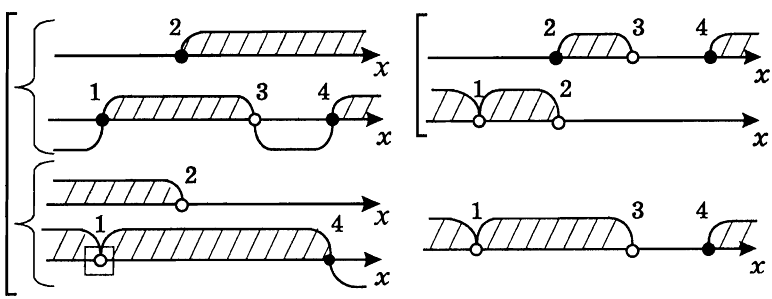


Ответ: $D(y) = [-3;-2] \cup [0;3]$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{|x-2|-1}}$.

$D(y):\quad \dfrac{x^2-5x+4}{|x-2|-1} \geqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x-2-1} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ \dfrac{x^2-5x+4}{2-x-1} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ \dfrac{(x-1)(x-4)}{1-x} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$



Ответ: $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;3) \cup [4;\infty)$.

6. $y=\sqrt{-\dfrac{3x^2+2|x|-5}{8x^2-6|x|+1}}.$

$$D(y):\quad -\frac{3x^2+2|x|-5}{8x^2-6|x|+1}\geqslant 0.$$

Пусть $|x|=t$ $(t\geqslant 0)$, тогда $x^2=|x|^2=t^2$, получим

$$-\frac{3t^2+2t-5}{8t^2-6t+1}\geqslant 0.$$

а) $3t^2+2t-5=0;$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+15}}{3}=\frac{-1\pm 4}{3};\qquad \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{5}{3};\end{array}\right.$$

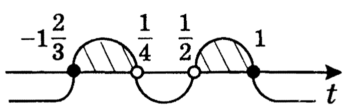
$$3t^2+2t-5=3(t-1)\left(t+\frac{5}{3}\right).$$

б) $8t^2-6t+1=0;$

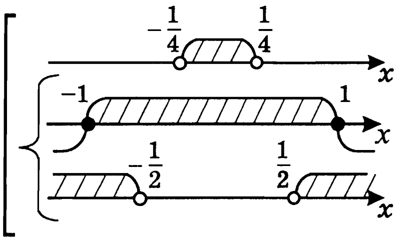
$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{8}=\frac{3\pm 1}{8};\qquad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}\\ t=\dfrac{1}{4};\end{array}\right.$$

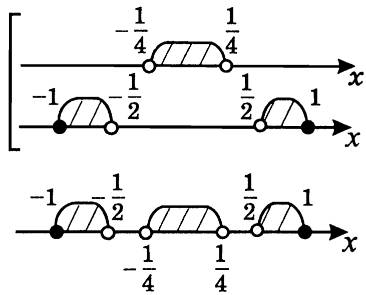
$$8t^2-6t+1=8\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right).$$

$$-\frac{3(t-1)\left(t+\frac{5}{3}\right)}{8\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)}\geqslant 0;$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|<\dfrac{1}{4},\\ |x|\geqslant -1\dfrac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}|x|\leqslant 1,\\ |x|>\dfrac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{4},\\ x>-\dfrac{1}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 1,\\ x\geqslant -1,\\ \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{2}\\ x<-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$





Ответ: $D(y)=\left[-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

7. $y=\sqrt{2-\left|\frac{4x^2-9}{2x^2-5x+3}\right|}$.

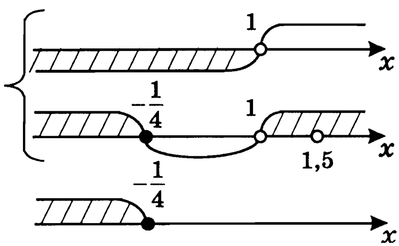
$D(y):\quad 2-\left|\frac{4x^2-9}{2x^2-5x+3}\right|\geqslant 0.$

$2x^2-5x+3=0;\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm1}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}\\ x=1;\end{array}\right.$

$2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x-3).$

$\left|\frac{(2x+3)(2x-3)}{(x-1)(2x-3)}\right|\leqslant 2;\quad \begin{cases}\left|\frac{2x+3}{x-1}\right|\leqslant 2,\\ 2x-3\neq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{2x+3}{x-1}\leqslant 2,\\ \frac{2x+3}{x-1}\geqslant -2,\\ x\neq 1,5;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{2x+3-2x+2}{x-1}\leqslant 0,\\ \frac{2x+3+2x-2}{x-1}\geqslant 0,\\ x\neq 1,5;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{5}{x-1}\leqslant 0,\\ \frac{4x+1}{x-1}\geqslant 0,\\ x\neq 1,5.\end{cases}$



Ответ: $D(y)=\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$.

8. $y=\sqrt{\dfrac{\left|x^2-x-6\right|}{x+3}-2x}.$

$D(y):\ \dfrac{\left|x^2-x-6\right|}{x+3}-2x\geqslant 0.\quad x^2-x-6=(x-3)(x+2).$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-x-6}{x+3}-2x\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-x-6<0,\\ \dfrac{-x^2+x+6}{x+3}-2x\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

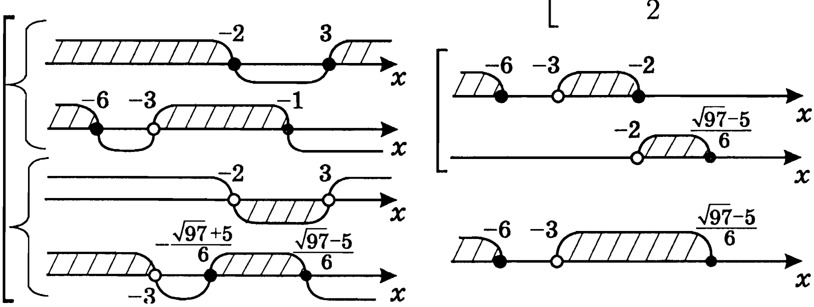
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-x-6-2x^2-6x}{x+3}\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x+2)<0,\\ \dfrac{-x^2+x+6-2x^2-6x}{x+3}\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ \dfrac{-x^2-7x-6}{x+3}\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x+2)<0,\\ \dfrac{-3x^2-5x+6}{x+3}\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

а) $-x^2-7x-6=0;\qquad \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-6;\end{array}\right.$

$-x^2-7x-6=-(x+1)(x+6).$

б) $-3x^2-5x+6=0;$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+72}}{-6}=\frac{5\pm\sqrt{97}}{-6};\qquad \left[\begin{array}{l}x\approx\dfrac{5}{6}\\ x\approx-\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.$$



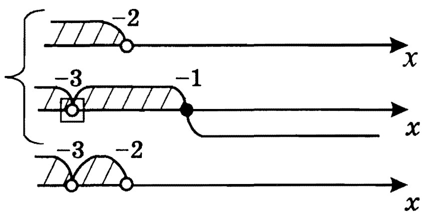
Ответ: $D(y)=(-\infty;-6]\cup\left(-3;\dfrac{\sqrt{97}-5}{6}\right].$

9. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4|x|+3}{|x+2|-1}}$.

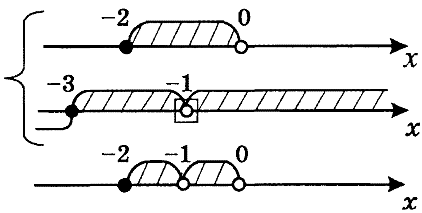
$$D(y):\quad \frac{x^2-4|x|+3}{|x+2|-1}\geqslant 0.$$

Рассмотрим неравенство на каждом интервале отдельно.

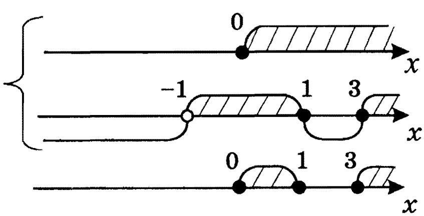
а) $\begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{x^2+4x+3}{-x-2-1}\geqslant 0; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x<-2, \\ -\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+3}\geqslant 0. \end{cases}$



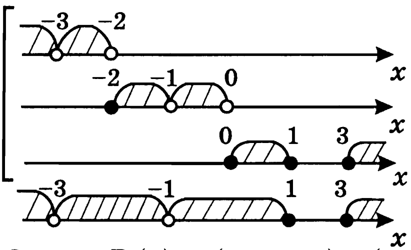
б) $\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x<0, \\ \dfrac{x^2+4x+3}{x+2-1}\geqslant 0; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x\geqslant -2, \\ x<0, \\ \dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1}\geqslant 0; \end{cases}$



в) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x+2-1}\geqslant 0; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x\geqslant 0, \\ \dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1}\geqslant 0. \end{cases}$



Объединяя все результаты, получим



Ответ: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 1] \cup [3; \infty)$.

10. $y = \sqrt{\dfrac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|} - \dfrac{1}{2x - 3}}$.

$$D(y): \quad \frac{5x^2 - 6x + 1}{|5x - 1|} - \frac{1}{2x - 3} \geqslant 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x - 1 > 0, \\ \dfrac{5x^2 - 6x + 1}{5x - 1} - \dfrac{1}{2x - 3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x - 1 < 0, \\ \dfrac{5x^2 - 6x + 1}{-(5x - 1)} - \dfrac{1}{2x - 3} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{(5x-1)(x-1)}{5x - 1} - \dfrac{1}{2x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{(5x-1)(x-1)}{-(5x - 1)} - \dfrac{1}{2x-3} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x - 1 - \dfrac{1}{2x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{5}, \\ 1 - x - \dfrac{1}{2x-3} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{2x^2 - 5x + 3 - 1}{2x - 3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{-2x^2 + 5x - 3 - 1}{2x - 3} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{-\left(2x^2 - 5x + 4\right)}{2x - 3} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4};$$

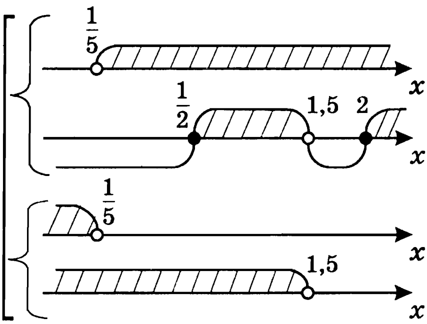
$$2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)\,.$$

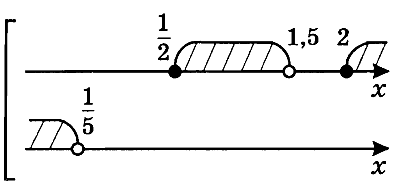
б) $2x^2 - 5x + 4 = 0;$

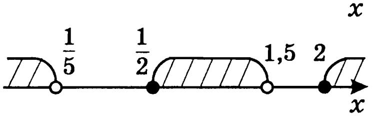
$D < 0$, значит, учитывая, что $\begin{cases} a = 2 > 0, \\ D < 0 \end{cases}$

$2x^2 - 5x + 4 > 0$ (при всех x).

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{(x-2)(2x-1)}{2x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{-1}{2x-3} \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$







Ответ: $D(y) = (-\infty; 0,2) \cup [0,5; 1,5) \cup [2; \infty)\,.$

Проверочная работа 4

1. $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20.$

2. $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geqslant 2x.$

3. $|x^2 + 3x - 15| < 2x^2 + x.$

4. $\dfrac{|x^2 + 5x + 6|}{x + 2} \leqslant \dfrac{4}{x}.$

5. $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x| + 5} \geqslant 1.$

6. $\dfrac{4x^2 + 5x + 1}{|4x + 1|} \geqslant \dfrac{1}{2x + 1}.$

7. $\dfrac{|4x^2 - 5x + 1|}{4x - 1} \leqslant \dfrac{1}{2|x| - 1}.$

8. $\dfrac{|x^2 - 5x| + 6}{|x - 3|x} \geqslant 1{,}5.$

Проверочная работа 5

1. $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(x^2 - 6|x| + 9\right)(|x| - 2) > 0, \\ x^2 - x - 20 \leqslant 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leqslant 0, \\ (x-2)^2 - 4|x-2| + 3 \geqslant 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 10 \leqslant x^2 - 8x + 25 < 18, \\ 7 + 6|2x-3| - (2x-3)^2 \leqslant 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9|x| + 14}{x-3} \leqslant 0, \\ |x-4|(|x+3| - 8) < 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{x^2-x} + \left|\dfrac{4x^2+6}{x^2-x}\right| < 6, \\ \left|x - 1 - x^2\right| < \left|-x - x^2 + 15\right|. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) < 180, \\ \dfrac{4}{|x+1| - 2} \geqslant |x-1|. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - x < \dfrac{36}{x^2 - x}, \\ \left(\dfrac{12x - 15}{2x^2 + x} - 1\right)(x - |2x-3|)(3 - x) \leqslant 0. \end{cases}$

3

Карточки заданий

Подготовительные карточки

Карточка 1

1. $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1.$
2. $\left(\dfrac{4x-5}{3x^2-x-14}+\dfrac{2}{x^2+2x}-\dfrac{1}{7x-3x^2}\right)\dfrac{x}{2x-3}\geqslant\dfrac{16-6x}{3x-7}.$
3. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\right|\leqslant 1.$
4. $||x-5|-3|\geqslant 2.$
5. $\dfrac{|4-x|}{3+x}\leqslant 2.$
6. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|<9.$

Карточка 2

1. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0.$
2. $\dfrac{4x+5}{4x+6}\geqslant\dfrac{x}{4x-10}\cdot\left(\dfrac{13}{2x^2-7x-15}+\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{5}{2x^2+3x}\right)$
3. $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}\right|>1.$
4. $||x+6|-4|\leqslant 2.$
5. $\dfrac{|2x-1|}{x^2+x-2}\geqslant 3.$
6. $|x+2|+|x+1|+|x-4|\geqslant 9.$

Карточка 3

1. $9 - \left(\dfrac{4x-22}{x-5}\right)^2 \geqslant 0.$
2. $\dfrac{4{,}5x^2}{x+3} \geqslant \dfrac{(x-3)^2}{27+3x-2x^2} : \left(\dfrac{3}{54-21x+2x^2} - \dfrac{x}{36-12x+x^2}\right).$
3. $|x^2-2x-3| < 3x-3.$
4. $||x-5|-2| \geqslant 1.$
5. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$
6. $|x-1|+|x+2|-|x-3| > 4.$

Карточка 4

1. $\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1-x-\dfrac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right) > 0.$
2. $\dfrac{18}{x+2} \geqslant \dfrac{(2-x)^2}{3x^2+2x-8} : \left(\dfrac{x}{6x^2-14x+8} - \dfrac{2}{4x^2-8x+4}\right).$
3. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x.$
4. $|x^2-6x+8| \leqslant 4-x.$
5. $||x+7|-5x| > 3x-1.$
6. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3| \leqslant 4.$

Карточка 5

1. $\dfrac{3}{6x^2-x-12} < \dfrac{25x-47}{10x-15} - \dfrac{3}{3x+4}.$
2. $\left(\dfrac{1+5x}{6+17x-3x^2} - \dfrac{1+3x}{6+29x-5x^2}\right) : \dfrac{1+4x}{1+8x+15x^2} \leqslant \dfrac{24}{6-x}.$
3. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4.$
4. $||x-5|-3| \geqslant 2x-1.$
5. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant x+2.$
6. $|2x-4|-|3x+3|-|x-1| > -6.$

Решение подготовительных карточек

Решение подготовительной карточки 1

1. $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1.$

$\dfrac{2+x+5(2-x)-(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)}<0;$

$\dfrac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)}<0;\ \dfrac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0;$

$x^2-4x+8>0$ (при всех x), так как

$\begin{cases} a=1>0, \\ D<0. \end{cases}\quad \dfrac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(2-x)(2+x)}<0.$

Вид неканонический.

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

2. $\left(\dfrac{4x-5}{3x^2-x-14}+\dfrac{2}{x^2+2x}-\dfrac{1}{7x-3x^2}\right)\dfrac{x}{2x-3}\geqslant\dfrac{16-6x}{3x-7}.$

$3x^2-x-14=3(x+2)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)=(x+2)(3x-7),$

$3x^2-x-14=0,$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\dfrac{1\pm13}{6};\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{3} \\ x=-2. \end{array}\right.$

$\left(\dfrac{4x-5}{(x+2)(3x-7)}+\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{1}{x(3x-7)}\right)\cdot\dfrac{x}{2x-3}-\dfrac{16-6x}{3x-7}\geqslant0;$

$\dfrac{x(4x-5)+2(3x-7)+x+2}{x(x+2)(3x-7)}\cdot\dfrac{x}{2x-3}-\dfrac{16-6x}{3x-7}\geqslant0;$

$\dfrac{4x^2+2x-12}{x(x+2)(3x-7)}\cdot\dfrac{x}{2x-3}-\dfrac{16-6x}{3x-7}\geqslant0.$

$4x^2+2x-12=0;\ 2x^2+x-6=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{-1\pm7}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Так как $4x^2+2x-12=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x+2)=2(2x-3)(x+2)$,

$$\frac{2(2x-3)(x+2)}{x(x+2)(3x-7)}\cdot\frac{x}{2x-3}-\frac{16-6x}{3x-7}\geqslant 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3x-7}-\dfrac{16-6x}{3x-7}\geqslant 0,\\ x\neq 1{,}5,\\ x\neq 0,\\ x\neq -2;\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{2-16+6x}{3x-7}\geqslant 0,\\ x\neq 1{,}5,\\ x\neq 0,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2(3x-7)}{3x-7}\geqslant 0,\\ x\neq 1{,}5,\\ x\neq 0,\\ x\neq -2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x\neq 1{,}5,\\ x\neq 2\dfrac{1}{3},\\ x\neq 0,\\ x\neq -2.\end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;1{,}5)\cup\left(1{,}5;2\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(2\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

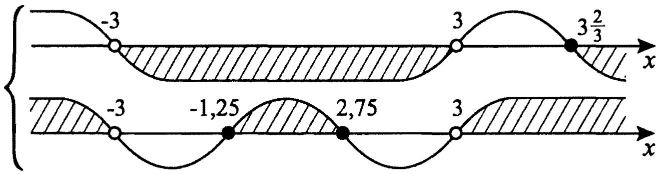
3. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\right|\leqslant 1.$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\geqslant -1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2-x^2+9}{(x-3)(x+3)}\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2-3x+2+x^2-9}{(x+3)(x-3)}\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{11-3x}{(x-3)(x+3)}\leqslant 0,\\ \dfrac{2x^2-3x-7}{(x+3)(x-3)}\geqslant 0.\end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 7 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x \approx 2{,}75 \\ x \approx -1{,}25. \end{array}\right.$$

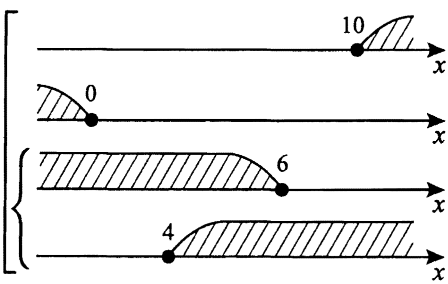


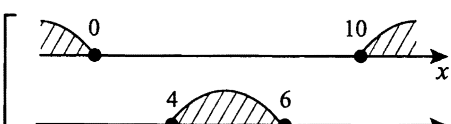
Ответ: $\left[\frac{3-\sqrt{65}}{4}; \frac{3+\sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[3\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

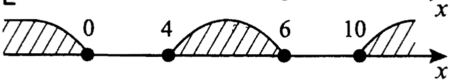
4. $||x-5|-3| \geqslant 2$.

$$\left[\begin{array}{l} |x-5| - 3 \geqslant 2 \\ |x-5| - 3 \leqslant -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} |x-5| \geqslant 5 \\ |x-5| \leqslant 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-5 \geqslant 5 \\ x-5 \leqslant -5, \\ \begin{cases} x-5 \leqslant 1, \\ x-5 \geqslant -1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 10 \\ x \leqslant 0, \\ \begin{cases} x \leqslant 6, \\ x \geqslant 4. \end{cases} \end{array}\right.$$





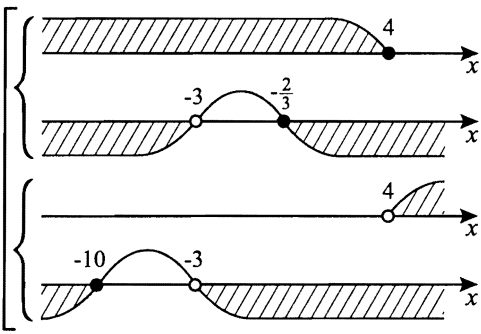


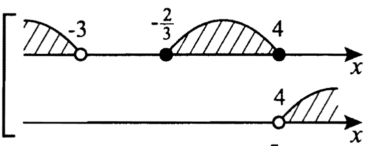
Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; 6] \cup [10; +\infty)$.

5. $\dfrac{|4-x|}{3+x} \leqslant 2.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4-x \geqslant 0, & (|4-x| = 4-x) \\ \dfrac{4-x}{3+x} \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x < 0, & (|4-x| = x-4) \\ \dfrac{x-4}{3+x} \leqslant 2; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 4, \\ \dfrac{4-x-2(3+x)}{3+x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{x-4-2(3+x)}{3+x} \leqslant 0; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 4, \\ \dfrac{-3x-2}{3+x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{-x-10}{3+x} \leqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

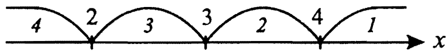




Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

6. $|x-2| + |x-3| + |2x-8| < 9.$

Разобьем числовую ось корнями модулей на четыре интервала и на каждом отдельно раскроем модули, и решим неравенство. Затем, полученные на каждом интервале решения обьединим в ответе.



$$1)\ \begin{cases} x \geqslant 4, & \begin{pmatrix} x-4 \geqslant 0 & |x-4| = x-4 \\ x-3 > 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \end{pmatrix} \\ x-2+x-3+2x-8 < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x < 5{,}5; \end{cases} \quad [4; 5{,}5);$$

$$2)\ \begin{cases} x < 4, & \begin{pmatrix} x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \\ x-3 \geqslant 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2 > 0 & |x-2| = x-2 \end{pmatrix} \\ x \geqslant 3, & \\ x-2+x-3+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 4, \\ x \geqslant 3, \\ 3 < 9; \end{cases} \quad [3; 4);$$

$$3)\ \begin{cases} x < 3, & \begin{pmatrix} x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \\ x-2 \geqslant 0 & |x-2| = x-2 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ x \geqslant 2, & \\ x-2+3-x+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x \geqslant 2, \\ x > 0; \end{cases} \quad [2; 3);$$

$$4)\ \begin{cases} x < 2, & \begin{pmatrix} x-2 < 0 & |x-2| = 2-x \\ x-3 < 0 & |x-3| = 3-x \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ 2-x+3-x+8-2x < 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > 1; \end{cases} \quad (1; 2).$$

$(1; 2) \cup [2; 3) \cup [3; 4) \cup [4; 5{,}5)$.

Ответ: $(1; 5{,}5)$.

Решение подготовительной карточки 2

1. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0.$

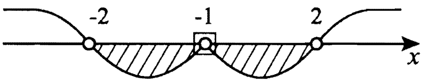
Пусть $x^2=t$, тогда

$x^4-2x^2-8=t^2-2t-8=(t-4)(t+2),$

так как $t^2-2t-8=0;$ $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2. \end{array}\right.$

$\dfrac{(x^2-4)(x^2+2)}{(x+1)^2}<0;\quad \dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2}<0;$

$\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}<0,$ так как $x^2+2>0$ (при всех x).



Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;2)$.

2. $\dfrac{4x+5}{4x+6}\geqslant\dfrac{x}{4x-10}\cdot\left(\dfrac{13}{2x^2-7x-15}+\dfrac{1}{5-x}+\dfrac{5}{2x^2+3x}\right).$

$2x^2-7x-15=2(x-5)(x+1{,}5)=(x-5)(2x+3)$, так как $2x^2-7x-15=0.$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49+120}}{4}=\dfrac{7\pm13}{4};$ $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1{,}5. \end{array}\right.$

$\dfrac{4x+5}{2(2x+3)}\geqslant\dfrac{x}{2(2x-5)}\left(\dfrac{13}{(x-5)(2x+3)}-\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{5}{x(2x+3)}\right);$

$\dfrac{4x+5}{2(2x+3)}\geqslant\dfrac{x}{2(2x-5)}\left(\dfrac{13x-x(2x+3)+5(x-5)}{x(x-5)(2x+3)}\right);$

$\dfrac{x}{2(2x-5)}\cdot\dfrac{-2x^2+15x-25}{x(2x+3)(x-5)}-\dfrac{4x+5}{2(2x+3)}\leqslant0;$

$\dfrac{-(x-5)(2x-5)}{x(2x+3)(x-5)}\cdot\dfrac{x}{2(2x-5)}-\dfrac{4x+5}{2(2x+3)}\leqslant0,$ так как

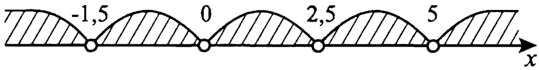
$-2x^2+15x-25=-2(x-5)(x-2{,}5)=-(x-5)(2x-5);$

$2x^2-15x+25=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{225-200}}{4}=\dfrac{15\pm5}{4};$ $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=2{,}5. \end{array}\right.$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2(2x+3)} - \dfrac{4x+5}{2(2x+3)} \leqslant 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2{,}5; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{1+4x+5}{2(2x+3)} \leqslant 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leqslant 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2{,}5, \\ x \neq -1{,}5. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 0) \cup (0; 2{,}5) \cup (2{,}5; 5) \cup (5; +\infty)$.

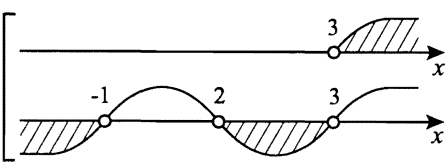
3. $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}\right| > 1$.

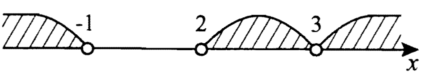
$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} > 1 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x-3} < -1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2x+1-x+3}{x-3} > 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1+x-3}{x-3} < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+4}{x-3} > 0 \\ \dfrac{x^2-x-2}{x-3} < 0. \end{array}\right.$$

$x^2-3x+4>0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-3} > 0 \\ \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-3} < 0. \end{array}\right.$$

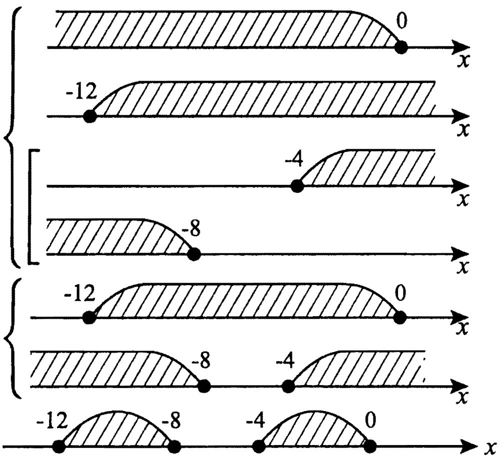




Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

4. $\big||x+6|-4\big| \leqslant 2.$ $\quad \begin{cases} |x+6|-4 \leqslant 2, \\ |x+6|-4 \geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+6| \leqslant 6, \\ |x+6| \geqslant 2; \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+6 \leqslant 6, \\ x+6 \geqslant -6, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x+6 \geqslant 2 \\ x+6 \leqslant -2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x \geqslant -12, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant -4 \\ x \leqslant -8. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



Ответ: $[-12;-8] \cup [-4;0]$.

5. $\dfrac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geqslant 3.$

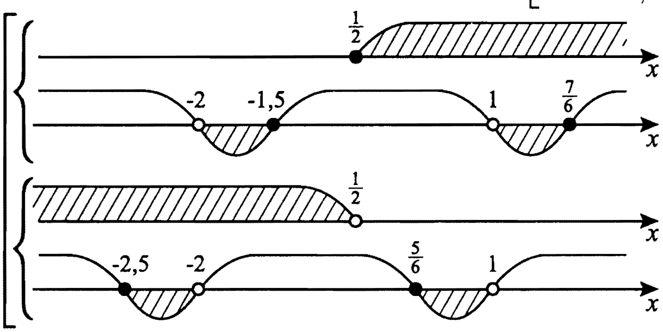
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \quad (|2x-1| = 2x-1) \\ \dfrac{2x-1}{x^2+x-2} \geqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 < 0, \quad (|2x-1| = 1-2x) \\ \dfrac{1-2x}{x^2+x-2} \geqslant 3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x-1-3x^2-3x+6}{x^2+x-2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1-2x-3x^2-3x+6}{x^2+x-2} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{-3x^2-x+5}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x < \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{-3x^2-5x+7}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3x^2+x-5}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x < \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3x^2+5x-7}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

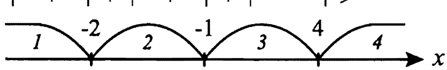
$$3x^2+x-5=0; \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}; \quad \left[\begin{array}{l}x \approx \dfrac{7}{6}\\ x \approx -1{,}5.\end{array}\right.$$

$$3x^2+5x-7=0; \quad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{109}}{6}; \quad \left[\begin{array}{l}x \approx \dfrac{5}{6}\\ x \approx -2{,}5.\end{array}\right.$$



Ответ: $\left[\dfrac{-5-\sqrt{109}}{6}; -2\right) \cup \left(1; \dfrac{-1+\sqrt{61}}{6}\right]$.

6. $|x+2|+|x+1|+|x-4| \geqslant 9$.



$$1)\ \left\{\begin{array}{l}x<-2, \quad \left(\begin{array}{ll}x+2<0 & |x+2|=-x-2\\ x+1<0 & |x+1|=-x-1\\ x-4<0 & |x-4|=4-x\end{array}\right)\\ -x-2-x-1+4-x \geqslant 9;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x<-2,\\ -3x \geqslant 8;\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x<-2,\\ x \leqslant -2\dfrac{2}{3};\end{array}\right. \qquad x \leqslant -2\frac{2}{3};$$

$$2)\ \begin{cases} x \geqslant -2, & \begin{pmatrix} x+2 \geqslant 0 & |x+2| = x+2 \\ x+1 < 0 & |x+1| = -x-1 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \end{pmatrix} \\ x < -1, & \\ x+2-x-1+4-x \geqslant 9; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < -1, \\ -x \geqslant 4; \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < -1, \\ x \leqslant -4; \end{cases} \quad \text{решений нет;}$$

$$3)\ \begin{cases} x \geqslant -1, & \begin{pmatrix} x+1 \geqslant 0 & |x+1| = x+1 \\ x-4 < 0 & |x-4| = 4-x \\ x+2 > 0 & |x+2| = x+2 \end{pmatrix} \\ x < 4, & \\ x+2+x+1+4-x \geqslant 9; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 4, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \quad [2;4);$$

$$4)\ \begin{cases} x \geqslant 4, & \begin{pmatrix} x-4 \geqslant 0 & |x-4| = x-4 \\ x+2 > 0 & |x+2| = x+2 \\ x+1 > 0 & |x+1| = x+1 \end{pmatrix} \\ x+2+x+1+x-4 \geqslant 9; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 3x \geqslant 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \geqslant 3\frac{1}{3}; \end{cases} \quad x \geqslant 4.$$

Объединив ответы, имеем: $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

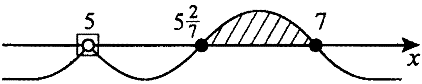
Решение подготовительной карточки 3

1. $9-\left(\dfrac{4x-22}{x-5}\right)^2\geqslant 0.$

$\left(3-\dfrac{4x-22}{x-5}\right)\left(3+\dfrac{4x-22}{x-5}\right)\geqslant 0;$

$\dfrac{3x-15-4x+22}{x-5}\cdot\dfrac{3x-15+4x-22}{x-5}\geqslant 0;$

$\dfrac{7-x}{x-5}\cdot\dfrac{7x-37}{x-5}\geqslant 0.$



Ответ: $\left[5\dfrac{2}{7};7\right].$

2. $\dfrac{4{,}5x^2}{x+3}\geqslant\dfrac{(x-3)^2}{27+3x-2x^2}:\left(\dfrac{3}{54-21x+2x^2}-\dfrac{x}{36-12x+x^2}\right).$

$27+3x-2x^2=-(2x-9)(x+3);$

$2x^2-3x-27=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+216}}{4}=\dfrac{3\pm 15}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=4{,}5\\ x=-3;\end{array}\right.$

$2x^2-21x+54=(2x-9)(x-6);$

$2x^2-21x+54=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{21\pm\sqrt{441-432}}{4}=\dfrac{21\pm 3}{4};\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4{,}5.\end{array}\right.$

$\dfrac{(x-3)^2}{-(2x-9)(x+3)}:\left(\dfrac{3}{(2x-9)(x-6)}-\dfrac{x}{(x-6)^2}\right)\leqslant\dfrac{4{,}5x^2}{x+3};$

$\dfrac{4{,}5x^2}{x+3}+\dfrac{(x-3)^2}{(2x-9)(x+3)}:\left(\dfrac{3(x-6)-x(2x-9)}{(2x-9)(x-6)^2}\right)\geqslant 0;$

$\dfrac{4{,}5x^2}{x+3}+\dfrac{(x-3)^2}{(2x-9)(x+3)}\cdot\dfrac{(x-6)^2(2x-9)}{-2x^2+12x-18}\geqslant 0;$

$\dfrac{4{,}5x^2}{x+3}+\dfrac{(x-3)^2(x-6)^2(2x-9)}{(2x-9)(x+3)(-2)(x-3)^2}\geqslant 0;$

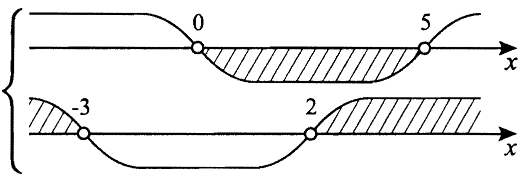
$$\begin{cases} \dfrac{4{,}5x^2}{x+3} - \dfrac{(x-6)^2}{2(x+3)} \geqslant 0, \\ x \neq 4{,}5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{9x^2-(x-6)^2}{2(x+3)} \geqslant 0, \\ x \neq 4{,}5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4(2x-3)(x+3)}{2(x+3)} \geqslant 0, \\ x \neq 4{,}5, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 4{,}5, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

Ответ: $[1{,}5; 3) \cup (3; 4{,}5) \cup (4{,}5; 6) \cup (6; +\infty)$.

3. $|x^2-2x-3| < 3x-3$. $\begin{cases} x^2-2x-3 < 3x-3, \\ x^2-2x-3 > 3-3x; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-5x < 0, \\ x^2+x-6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-5) < 0, \\ (x+3)(x-2) > 0. \end{cases}$$



$(2; 5)$.

Здесь мы воспользовались I свойством модульных неравенств.

Можно иначе. Если правая часть положительна, то возводим обе части в квадрат, если нет, то решения нет. Таким образом,

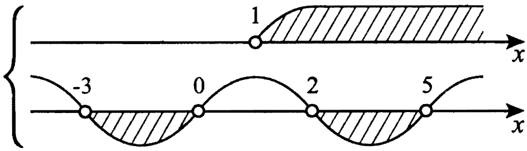
$$|x^2-2x-3| < 3x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 > 0, \\ (|x^2-2x-3|)^2 < (3x-3)^2; \end{cases}$$

(так как $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0 \\ |\alpha|^2 < \beta^2 \end{cases}$).

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x^2-2x-3+3x-3)(x^2-2x-3-3x+3) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x^2+x-6)(x^2-5x) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ (x+3)(x-2)x(x-5) < 0. \end{cases}$$



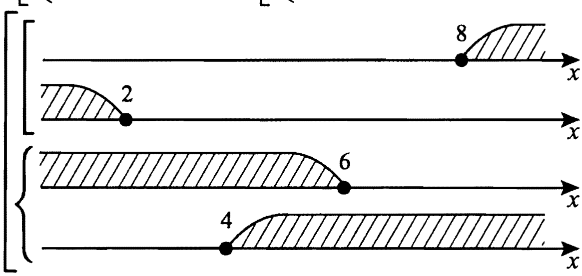
$(2;5)$

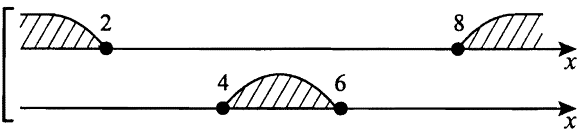
Ответ: $(2;5)$.

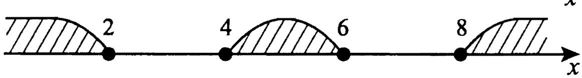
4. $||x-5|-2| \geqslant 1$.

$$\left[\begin{array}{l} |x-5|-2 \geqslant 1 \\ |x-5|-2 \leqslant -1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} |x-5| \geqslant 3 \\ |x-5| \leqslant 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-5 \geqslant 3 \\ x-5 \leqslant -3, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-5 \leqslant 1, \\ x-5 \geqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 8, \\ x \leqslant 2 \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 6, \\ x \geqslant 4. \end{array}\right. \end{array}\right.$$





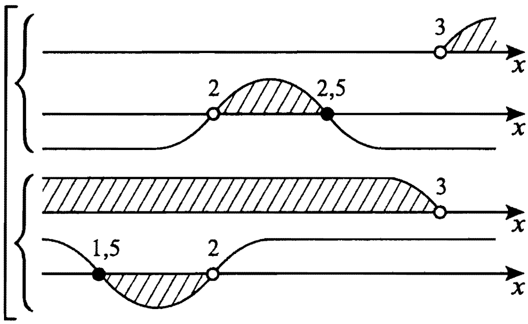


Ответ: $(-\infty;2] \cup [4;6] \cup [8;+\infty)$.

5. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2$.

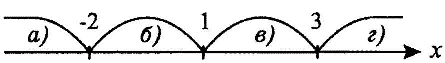
$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 3, \quad (|x-3| = x-3) \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geqslant 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 3, \quad (|x-3| = 3-x) \\ \dfrac{3-x}{x^2-5x+6} \geqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)} \geqslant 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 3, \\ \dfrac{3-x}{(x-3)(x-2)} \geqslant 2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{1}{x-2} \geqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{-1}{x-2} \geqslant 2; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{5-2x}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{2x-3}{x-2} \leqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $[1{,}5; 2)$.

6. $|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4$.



а) $x < -2$

$$\begin{cases} x+2 < 0, \\ x-1 < 0, \\ x-3 < 0, \\ 1-x-x-2-(3-x) > 4; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x+2| = -x-2 \\ |x-1| = 1-x \\ |x-3| = 3-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ x < -8; \end{cases} \quad (-\infty; -8);$$

б) $-2 \leqslant x < -1$

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ x-1 < 0, \\ x-3 < 0, \\ 1-x+x+2-(3-x) > 4; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = 1-x \\ |x-3| = 3-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 1, \\ x > 4; \end{cases} \quad \text{нет решений;}$$

в) $1 \leqslant x < 3$

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ x-3<0, \\ x-1+x+2-(3-x)>4; \end{cases} \begin{pmatrix} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = x-1 \\ |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 3, \\ x > 2; \end{cases} \quad (2;3);$$

г) $x \geqslant 3$

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0, \\ x-3 \geqslant 0, \\ x-1+x+2-(x-3)>4; \end{cases} \begin{pmatrix} |x+2| = x+2 \\ |x-1| = x-1 \\ |x-3| = x-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > 0; \end{cases} \quad [3;+\infty).$$

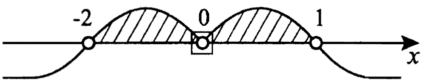
Ответ: $(-\infty;-8) \cup (2;+\infty)$.

Решение подготовительной карточки 4

1. $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\right)\left(1-x-\frac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0.$

$$\frac{x^3+6x^2+12x+8}{8x}\cdot\frac{(1-x)\left((x+2)^2-(x-2)^2\right)}{(x+2)^2}>0;$$

$$\frac{(x+2)^3}{8x}\cdot\frac{(1-x)\cdot 2x\cdot 4}{(x+2)^2}>0.$$



Ответ: $(-2;0)\cup(0;1)$.

2. $\frac{18}{x+2}\geqslant\frac{(2-x)^2}{3x^2+2x-8}:\left(\frac{x}{6x^2-14x+8}-\frac{2}{4x^2-8x+4}\right)$.

$$3x^2+2x-8=3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+2)=(3x-4)(x+2);$$

$$6x^2-14x+8=6\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)=2(3x-4)(x-1);$$

$$3x^2+2x-8=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{3}=\frac{-1\pm5}{3};\quad\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\frac{4}{3};\end{array}\right.$$

$$6x^2-14x+8=0;$$

$$3x^2-7x+4=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6};\quad\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\x=1.\end{array}\right.$$

$$\frac{18}{x+2}\geqslant\frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)}:\left(\frac{x}{2(3x-4)(x-1)}-\frac{2}{4(x-1)^2}\right);$$

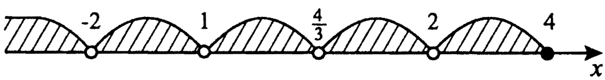
$$\frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)}:\left[\frac{2x(x-1)-2(3x-4)}{4(x-1)^2(3x-4)}\right]-\frac{18}{x+2}\leqslant0;$$

$$\frac{(2-x)^2}{(3x-4)(x+2)}\cdot\frac{4(x-1)^2(3x-4)}{2x^2-8x+8}-\frac{18}{x+2}\leqslant0;$$

$$\frac{(2-x)^2 4(x-1)^2(3x-4)}{(3x-4)(x+2)2(x-2)^2} - \frac{18}{x+2} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-1)^2}{x+2} - \dfrac{18}{x+2} \leqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2\left((x-1)^2-9\right)}{x+2} \leqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{4}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-4)(x+2)}{x+2} \leqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \neq 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{4}{3}, \\ x \neq -2. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3}; 2\right) \cup (2; 4]$.

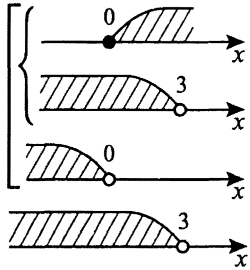
3. $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geqslant 2x.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \quad |x| = x \\ \dfrac{x^2 - x - 12}{x-3} \geqslant 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \quad |x| = -x \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{x-3} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 12 - 2x(x-3)}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{(x+4)(x-3)}{x-3} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{-x^2 + 5x - 12}{x-3} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x + 4 \geqslant 2x, \\ x \neq 3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$-(x^2-5x+12)<0; \quad \text{(при всех } x\text{)} \begin{cases} a=-1<0,\\ D<0.\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{x-3}\leqslant 0 \end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ x\leqslant 4,\\ x\neq 3; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 0,\\ x<3,\end{cases}\\ x<0.\end{array}\right.$$



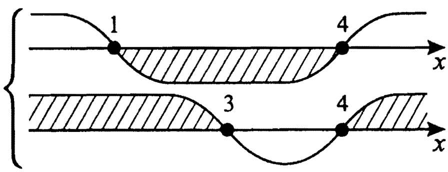
Ответ: $(-\infty;\dot{3})$.

4. $|x^2-6x+8|\leqslant 4-x$.

а) Первый способ решения:

$$\begin{cases} x^2-6x+8\leqslant 4-x,\\ x^2-6x+8\geqslant x-4;\end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+4\leqslant 0,\\ x^2-7x+12\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(x-1)\leqslant 0,\\ (x-3)(x-4)\geqslant 0.\end{cases}$$



$[1;3]\cup\{4\}$,

так как можно воспользоваться I свойством модульных неравенств.

б) Другой способ:

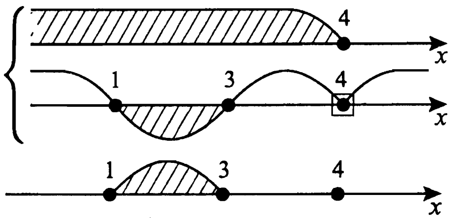
$$|x^2-6x+8|\leqslant 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\geqslant 0,\\ (|x^2-6x+8|)^2\leqslant (4-x)^2,\end{cases}$$

так как $|x|^2=x^2$;

$$\begin{cases} x\leqslant 4,\\ (x^2-6x+8+4-x)(x^2-6x+8-4+x)\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leqslant 4,\\ (x^2-7x+12)(x^2-5x+4)\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leqslant 4,\\ (x-4)(x-3)(x-4)(x-1)\leqslant 0.\end{cases}$$



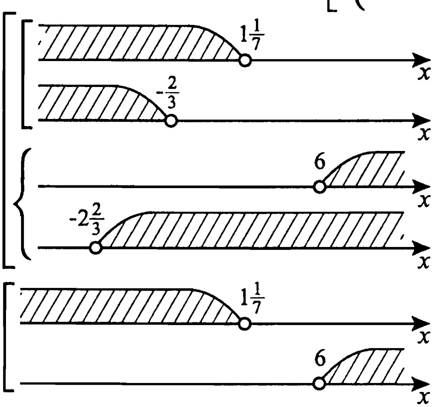
Ответ: $[1;3]\cup\{4\}$.

5. $||x+7|-5x|>3x-1$.

$$\left[\begin{array}{l}|x+7|-5x>3x-1\\ |x+7|-5x<1-3x;\end{array}\right.$$

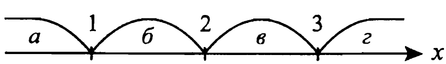
$$\left[\begin{array}{l}|x+7|>8x-1\\ |x+7|<2x+1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x+7>8x-1\\ x+7<1-8x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+7<2x+1,\\ x+7>-2x-1;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{8}{7}\\ x<-\dfrac{2}{3},\\ \left\{\begin{array}{l}x>6,\\ x>-2\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$



Ответ: $\left(-\infty;1\dfrac{1}{7}\right)\cup(6;+\infty)$.

6. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|\leqslant 4$.



$$\text{а)}\ \begin{cases} x < 1, & \begin{pmatrix} x-1<0 & |x-1| = 1-x \\ x-2<0 & |x-2| = 2-x \\ x-3<0 & |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \\ 1 - x + 2(x-2) - 3x + 9 \leqslant 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ -2x \leqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \quad \text{решений нет;}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x \geqslant 1, & \begin{pmatrix} x-1\geqslant 0 & |x-1| = x-1 \\ x-2<0 & |x-2| = 2-x \\ x-3<0 & |x-3| = 3-x \end{pmatrix} \\ x < 2, & \\ x - 1 + 2(x-2) - 3x + 9 \leqslant 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 2, \\ 4 \leqslant 4; \end{cases} \quad [1;2);$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x \geqslant 2, & \begin{pmatrix} x-2\geqslant 0 & |x-2| = x-2 \\ x-3<0 & |x-3| = 3-x \\ x-1>0 & |x-1| = x-1 \end{pmatrix} \\ x < 3, & \\ x - 1 - 2(x-2) - 3x + 9 \leqslant 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 3, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \quad [2;3);$$

$$\text{г)}\ \begin{cases} x \geqslant 3, & \begin{pmatrix} x-3\geqslant 0 & |x-3| = x-3 \\ x-2>0 & |x-2| = x-2 \\ x-1>0 & |x-1| = x-1 \end{pmatrix} \\ x - 1 - 2(x-2) + 3x - 9 \leqslant 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 5; \end{cases} \quad [3;5].$$

Объединив все решения, имеем: $[1;5]$.

Ответ: $[1;5]$.

Решение подготовительной карточки 5

1. $\dfrac{3}{6x^2 - x - 12} < \dfrac{25x - 47}{10x - 15} - \dfrac{3}{3x + 4}$.

$$6x^2 - x - 12 = 6(x - 1{,}5)\left(x + \frac{4}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 4);$$

$$6x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{12} = \frac{1 \pm 17}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

$$\frac{3}{(2x - 3)(3x + 4)} - \frac{25x - 47}{5(2x - 3)} + \frac{3}{3x + 4} < 0;$$

$$\frac{15 - (25x - 47)(3x + 4) + 15(2x - 3)}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

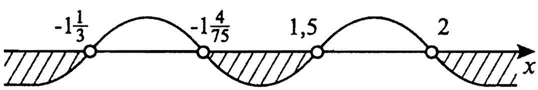
$$\frac{15 - 75x^2 + 141x + 188 - 100x + 30x - 45}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

$$\frac{-75x^2 + 71x + 158}{5(2x - 3)(3x + 4)} < 0;$$

$$-75x^2 + 71x + 158 = -75(x - 2)\left(x + \tfrac{79}{75}\right) = -(x - 2)(75x + 79);$$

$$75x^2 - 71x - 158 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{71 \pm \sqrt{71^2 + 4 \cdot 75 \cdot 158}}{150} = \frac{71 \pm 229}{150}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{79}{75}. \end{array}\right.$$



Ответ: $\left(-\infty; -1\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-1\dfrac{4}{75}; 1{,}5\right) \cup (2; +\infty)$.

2. $\left(\dfrac{1 + 5x}{6 + 17x - 3x^2} - \dfrac{1 + 3x}{6 + 29x - 5x^2}\right) : \dfrac{1 + 4x}{1 + 8x + 15x^2} \leqslant \dfrac{24}{6 - x}$.

$$6 + 17x - 3x^2 = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 6) = -(3x + 1)(x - 6);$$

$3x^2-17x-6=0;$

$$x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289+72}}{6}=\frac{17\pm19}{6};\quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{3}\\ x=6;\end{array}\right.$$

$$6+29x-5x^2=-5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-6)=-(5x+1)(x-6);$$

$5x^2-29x-6=0;$

$$x_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841+120}}{10}=\frac{29\pm31}{10};\quad \left[\begin{array}{l} x=6\\ x=-\dfrac{1}{5};\end{array}\right.$$

$1+8x+15x^2=(5x+1)(3x+1);$

$15x^2+8x+1=0;$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-15}}{15};\quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{3}\\ x=-\dfrac{1}{5}.\end{array}\right.$$

$$\left(\frac{1+3x}{(5x+1)(x-6)}-\frac{1+5x}{(3x+1)(x-6)}\right):\frac{1+4x}{(1+3x)(1+5x)}-\frac{24}{6-x}\leqslant 0;$$

$$\frac{(1+3x)^2-(1+5x)^2}{(1+3x)(1+5x)(x-6)}\cdot\frac{(1+3x)(1+5x)}{1+4x}+\frac{24}{x-6}\leqslant 0;$$

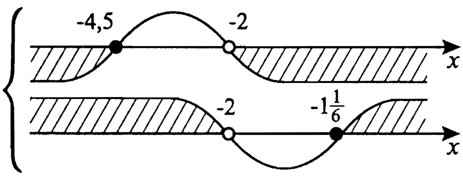
$$\frac{2(1+4x)(-2x)(1+3x)(1+5x)}{(1+3x)(1+5x)(x-6)(1+4x)}+\frac{24}{x-6}\leqslant 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{-4x}{x-6}+\dfrac{24}{x-6}\leqslant 0,\\ x\neq-\dfrac{1}{3},\\ x\neq-\dfrac{1}{5},\\ x\neq-\dfrac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{-4(x-6)}{x-6}\leqslant 0,\\ x\neq-\dfrac{1}{3},\\ x\neq-\dfrac{1}{5},\\ x\neq-\dfrac{1}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}-4\leqslant 0,\\ x\neq-\dfrac{1}{3},\\ x\neq-\dfrac{1}{5},\\ x\neq-\dfrac{1}{4},\\ x\neq 6.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{5};6\right)\cup$
$\cup(6;+\infty)$.

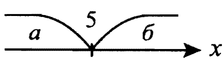
3. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4.$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+2} \leqslant 4, \\ \dfrac{2x-1}{x+2} \geqslant -4; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2x-1-4x-8}{x+2} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x-1+4x+8}{x+2} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{-(2x+9)}{x+2} \leqslant 0, \\ \dfrac{6x+7}{x+2} \geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -4{,}5] \cup \left[-1\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

4. $||x-5|-3| \geqslant 2x-1.$

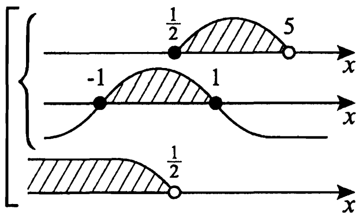


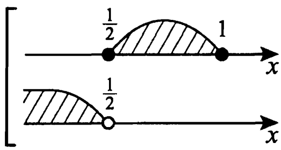
а) $\begin{cases} x-5<0, \quad |x-5| = 5-x \\ |5-x-3| \geqslant 2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x<5, \\ |2-x| \geqslant 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

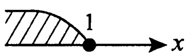
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ x<5, \\ |2-x|^2 \geqslant (2x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1<0, \\ x<5; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x<5, \\ (x-2+2x-1)(x-2-2x+1) \geqslant 0 \end{cases} \\ x < \dfrac{1}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x < 5, \\ 3(x-1)(-x-1) \geqslant 0 \end{cases} \\ x < \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$







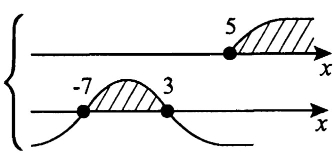
$(-\infty; 1]$.

б) $\begin{cases} x - 5 \geqslant 0, \quad |x-5| = x-5 \\ |x - 5 - 3| \geqslant 2x - 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ |x-8| \geqslant 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 5, \\ (|x-8|)^2 \geqslant (2x-1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ (x - 8 + 2x - 1)(x - 8 - 2x + 1) \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ 3(x-3)(-7-x) \geqslant 0. \end{cases}$$



нет решений.

Но можно проще, используя свойства.

$$||x-5|-3| \geqslant 2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-5|-3 \geqslant 2x-1 \\ |x-5|-3 \leqslant 1-2x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x-5| \geqslant 2x+2 \\ |x-5| \leqslant 4-2x; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-5 \geqslant 2x+2 \\ x-5 \leqslant -2x-2, \\ \left\{\begin{array}{l} x-5 \leqslant 4-2x, \\ x-5 \geqslant 2x-4; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant -7 \\ x \leqslant 1, \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3, \\ x \leqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

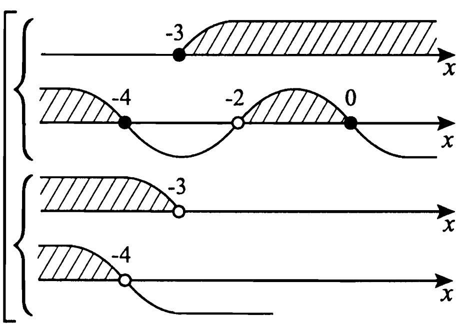
$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant -1 \\ x \leqslant 1; \end{array}\right. \quad x \leqslant 1.$$

Ответ: $(-\infty; 1]$.

5. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant x+2.$

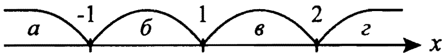
$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+3 \geqslant 0, \\ \dfrac{4}{x+3-1} \geqslant x+2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+3 < 0, \\ \dfrac{4}{-x-3-1} \geqslant x+2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -3, \\ \dfrac{4-(x+2)^2}{x+2} \geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -3, \\ \dfrac{-4-(x+2)(x+4)}{x+4} \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -3, \\ \dfrac{-x(x+4)}{x+2} \geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -3, \\ \dfrac{-(x^2+6x+12)}{x+4} \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -3, \\ \dfrac{-x(x+4)}{x+2} \geqslant 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < -3, \\ \dfrac{-1}{x+4} \geqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-2; 0]$.

6. $|2x-4|-|3x+3|-|x-1|>-6.$



а) $$\left\{\begin{array}{l} x<-1, \quad \left(\begin{array}{ll} 3x+3<0 & |3x+3|=-3x-3 \\ x-1<0 & |x-1|=1-x \\ 2x-4<0 & |2x-4|=4-2x \end{array}\right) \\ 4-2x+3x+3+x-1>-6; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x<-1, \\ x>-6; \end{array}\right. \quad (-6;-1);$$

б) $$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant -1, \\ x<1, \end{array} \left(\begin{array}{ll} 3x+3\geqslant 0 & |3x+3|=3x+3 \\ x-1<0 & |x-1|=1-x \\ 2x-4<0 & |2x-4|=4-2x \end{array}\right) \right. \\ \quad 4-2x-3x-3+x-1>-6;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant -1, \\ x<1, \\ x<\dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \quad [-1;1);$$

в) $$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 1, \\ x<2, \end{array} \left(\begin{array}{ll} x-1\geqslant 0 & |x-1|=x-1 \\ 2x-4<0 & |2x-4|=4-2x \\ 3x+3>0 & |3x+3|=3x+3 \end{array}\right) \right. \\ \quad 4-2x-3x-3-x+1>-6;$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 1, \\ x<2, \\ x<\dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \quad \left[1;\frac{4}{3}\right);$$

г) $$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 2, \quad \left(\begin{array}{ll} 2x-4\geqslant 0 & |2x-4|=2x-4 \\ 3x+3>0 & |3x+3|=3x+3 \\ x-1>0 & |x-1|=x-1 \end{array}\right) \\ 2x-4-3x-3-x+1>-6; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x<0; \end{array}\right. \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: $\left(-6;1\frac{1}{3}\right).$

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\leqslant\dfrac{1-2x}{1+x^3}$.
2. $\dfrac{x^2}{x^2-7x+10}+\dfrac{16}{3x^2-12}\leqslant 1$.
3. $|x^2+4x+3|>x+3$.
4. $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x$.
5. $||x-1|-5|\leqslant 2$.
6. $\dfrac{4x-1}{|x-1|}\geqslant |x+1|$.

Карточка 2

1. $\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x-2}$.
2. $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.
3. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geqslant 1$.
4. $||x+5|-2|<x+1$.
5. $\dfrac{4}{|x+1|-2}\geqslant x-1$.
6. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.

Карточка 3

1. $\left(\dfrac{x+1}{4-x}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}$.
2. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)}-\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{6-x}{x-4}\geqslant\dfrac{5(6-x)}{x-2}$.
3. $\dfrac{2x-5}{|x-3|}>-1$.
4. $\left|\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}\right|\leqslant 1$.
5. $||x+6|-4|\geqslant x+1$.
6. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.

Карточка 4

1. $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-20}-\dfrac{x-4}{2x^2+11x+5}\right):\dfrac{3}{2x+1}\leqslant\dfrac{3}{x-4}.$

3. $x^2-8x-\dfrac{3}{|x-4|}+18\leqslant 0.$

4. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1.$

5. $||x+5|-2x|>x+3.$

6. $|x-1|-|x-2|+|x-3|\geqslant x+5.$

Карточка 5

1. $\dfrac{3-x}{(x+2)(x-1)}\leqslant\dfrac{2(3-x)}{2x^2-x-1}.$

2. $\dfrac{x-3}{x^2+10x+21}+\dfrac{20}{3x^2+12x-63}\geqslant\dfrac{x-7}{9-x^2}.$

3. $\dfrac{|x+2|-x}{x}\leqslant 2.$

4. $|x^2+5x|\geqslant 6.$

5. $2|5-x|<|2-x|+|2x-7|.$

6. $||x+5|-2x|>x-3.$

Карточка 6

1. $\dfrac{2}{x^2-3x-4}\geqslant\dfrac{3}{x^2+x-6}.$

2. $\dfrac{x+4}{x^2-3x-10}+\dfrac{x}{x^2+3x-4}\geqslant\dfrac{2x+0{,}8}{x^2-x-20}.$

3. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6}\leqslant 2.$

4. $\left|\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}\right|\geqslant 1.$

5. $||x+5|-x+2|\leqslant 1.$

6. $2|7-2x|<|7-3x|+|x+2|.$

Карточка 7

1. $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2 > 1.$

2. $\dfrac{6x+7}{2x+3} \geqslant \dfrac{2x+8}{3x+7} \cdot \left(\dfrac{x+4}{2x^2+x-3} - \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}\right).$

3. $(|x|-8)(|x|-2) > 0.$

4. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \geqslant 1.$

5. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right| < 1.$

6. $||x^2-3x+2|-1| > x-2.$

Карточка 8

1. $\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} > \dfrac{5}{x}.$

2. $\dfrac{17{,}5x}{2+5x-3x^2} \geqslant \dfrac{x+2}{3x+1} + \dfrac{3x-1}{2-x}.$

3. $||x+1|-5| \leqslant 2.$

4. $|x^2-3x|+x-2 < 0.$

5. $|x+1|+|x-2|-|x-3| > 4.$

6. $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+|x|}\right| > 1.$

Зачетные карточки заданий

Карточка 1

1. $\left(\dfrac{4x^2+5x-1}{2x^2+5x+3}\right)^2 > 1.$

2. $\frac{1}{x+2}+\frac{ax+6-2a-3x}{x-a-1}\left(\frac{a+3}{ax^2-3x^2-4a+12}-\frac{x+2}{a^2x-9x-2a^2+18}\right)\leqslant 0.$

3. $\dfrac{x^2-|x|-6}{x-2}\geqslant 2x.$

4. $\dfrac{|24-2x-x^2|}{x}\leqslant x.$

5. $\dfrac{2-|x-2|}{1-|x+2|}\leqslant 0.$

6. $|x^4-8x^3+17x^2+2x-24|\leqslant|x^3-4x^2+x+6|.$

Карточка 2

1. $\dfrac{35x}{4+10x-6x^2}\geqslant\dfrac{x+2}{3x+1}-\dfrac{3x-1}{x-2}.$

2. $\frac{2ax-2x^2}{2a-3x}+\frac{a+2x}{3a+5x}:\left(\frac{2a+x}{3a^2-ax-10x^2}-\frac{2a}{6a^2+7ax-5x^2}-\frac{x}{2a^2-5ax+2x^2}\right)>0.$

3. $|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}|\leqslant 1.$

4. $\dfrac{4x-1}{|x+1|}\geqslant x-1.$

5. $|x|\geqslant\dfrac{2x}{|x-3|}.$

6. $|5+x|<|x+2|+|2x-7|.$

Карточка 3

1. $\dfrac{(x-4)^2}{x^2-6x+9} > \dfrac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}$.

2. $\dfrac{11}{4x^2+14x-8} - \dfrac{4-3x}{3x^2-8x-3} \geqslant \dfrac{2x+1}{2x^2+2x-24}$.

3. $||x+6|-4| < x+1$.

4. $\dfrac{1}{|x-1|-3} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

5. $\left|\dfrac{x^2+5x}{x+1}\right| \geqslant 3$.

6. $|x+1| - |x| + |2x-3| > 2x+4$.

Карточка 4

1. $\dfrac{(x+4)^2}{x^2+6x+9} > \dfrac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}$.

2. $\left(\frac{2c+3x}{2x^2-cx-3c^2} - \frac{5c}{6x^2-13cx+6c^2} + \frac{5x}{2c^2-cx-3x^2}\right) \cdot \frac{x+c}{x-9c} \geqslant \frac{0{,}2}{2c-3x}$.

3. $\dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|} < \dfrac{2}{x}$.

4. $||x+7|-2x| < x+1$.

5. $|x+2| + |x-1| < 3x$.

6. $\left|\dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-20}\right| \geqslant 1$.

Карточка 5

1. $\dfrac{6x^2-x-18}{3x^2-12} + \dfrac{5-2x}{2-x} \leqslant 5 + \dfrac{1}{x-2}$.

2. $\left(\frac{a+5b}{6a^2+17ab-3b^2} - \frac{a+3b}{6a^2+29ab-5b^2}\right) : \frac{a+4b}{a^2+8ab+15b^2} \leqslant \frac{24a}{6a-b}$.

3. $||x-6|-3| < x-1$.

4. $\dfrac{x^2+x-12}{|x+4|} \leqslant \dfrac{4}{x}$.

5. $(|x+1|-3)(|x-2|-5) < 0$.

6. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1$.

Карточка 6

1. $\dfrac{5}{(x+1)^3} - \dfrac{3}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{2}{x+1}.$

2. $\left(\dfrac{2+3x}{2x^2-x-3} - \dfrac{5}{6x^2-13x+6} + \dfrac{5x}{2-x-3x^2}\right)\dfrac{x+1}{x-9} \geqslant \dfrac{0{,}2}{2-3x}.$

3. $\dfrac{|x^2-5x+6|}{x-3} \leqslant \dfrac{3}{x}.$

4. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|.$

5. $|1-|x+2|| < 3-x.$

6. $|x+1|+|x-2|-|x+3| > 4.$

Карточка 7

1. $A(x,c) = \dfrac{2c+3x+6}{2x^2+x(8-c)+8-2c-3c^2} -$

$$-\frac{5c}{6x^2+x(24-13c)+24-26c+6c^2}+$$

$$+\frac{5(x+2)}{2c^2-x(c+12)-12-2c-3x^2}.$$

$$A(x,c)\cdot\frac{x+c+2}{x-9c+2}+\frac{0{,}2}{3x-2c+6} \leqslant 0.$$

2. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) \leqslant 4x^2.$

3. $|x^4+x^3-7x^2-x+6| \leqslant |x^3+2x^2-5x-6|.$

4. $|x^2-5|x|+4| \geqslant |2x^2-3|x|+1|.$

5. $\dfrac{(1+x)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$

6. $|x^2+4x-2| < 2x+1.$

Карточка 8

1. $\left(x-\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x-\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

2. $\left(\dfrac{2+5x}{24+34x-3x^2}-\dfrac{2+3x}{24+58x-5x^2}\right):\dfrac{4x+2}{4+16x+15x^2}\leqslant\dfrac{48}{12-x}.$

3. $\left|\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}\right|\geqslant\dfrac{3}{x}.$

4. $(x+6)^4+2x^2(x+6)^2\leqslant 35x^4.$

5. $(|1-3x|-|x+2|-2)(x^2-x-2|x-1|)\leqslant 0.$

6. $|(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|\leqslant 24.$

4

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x+1)(x-3)} \geqslant 0;$

2. $\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+4)(x-2)} \leqslant 0;$

3. $\dfrac{4(2x+3)(x-1)}{5x-3} > 0;$

4. $\dfrac{(x-4)^2}{(x+2)(x-6)} \geqslant 0;$

5. $\dfrac{x(x+6)}{(x+5)^2(x-1)} \leqslant 0;$

6. $\dfrac{\left(x^2+x-6\right)(x+2)}{x\left(1-x^2\right)} \geqslant 0;$

7. $\dfrac{x\left(4-x^2\right)}{\left(x^2-x-6\right)(3-x)^2} \leqslant 0;$

8. $\dfrac{\left(x^2+8x-9\right)(x-1)^3}{(x+2)^2(3-x)} \geqslant 0;$

9. $x+2 \leqslant \dfrac{9}{x+2};$

10. $\dfrac{3}{x^2-4x+3} \geqslant 1.$

Вариант 2

1. $\dfrac{(x+2)(x+5)}{(x-1)(x+3)} \geqslant 0;$

2. $\dfrac{(x-5)(x+3)}{(x-4)(x+2)} \leqslant 0;$

3. $\dfrac{4(2x-3)(x+1)}{5x+3} < 0;$

4. $\dfrac{(x+4)^2}{(x-2)(x+6)} \geqslant 0;$

5. $\dfrac{x(x-6)}{(x-5)^2(x+1)} \geqslant 0;$

6. $\dfrac{\left(x^2-x-6\right)(x-2)}{x\left(1-x^2\right)} \geqslant 0;$

7. $\dfrac{x\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+x-6\right)(3+x)^2} \leqslant 0;$

8. $\dfrac{\left(x^2-8x-9\right)(-x-1)^3}{(2-x)^2(x+3)} \geqslant 0;$

9. $2-x \leqslant \dfrac{9}{2-x};$

10. $\dfrac{3}{x^2+4x+3} \geqslant 1.$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\dfrac{(x-1)^2}{(x-7)(x+6)} \leqslant 0$;

2. $\dfrac{\left(x^2+x-6\right)(x-2)}{x\left(1-x^2\right)} \geqslant 0$;

3. $(x-1)(x-2)(2x-3) < (x-1)(x-2)^2$;

4. $\dfrac{\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-4\right)}{\left(x^3-8\right)x} \geqslant 0$;

5. $\dfrac{4}{4+3x-x^2} \leqslant 1$;

6. $\dfrac{x^2+3x+2}{(x+3)(x+4)} \leqslant 1$;

7. $\left(\dfrac{4-x}{x+2}\right)^2 \geqslant 4$;

8. $\dfrac{x-3}{x+2} \geqslant \dfrac{x+4}{x-2}$;

9. $\dfrac{2(x-2)^2+3(x-2)+1}{x^4-5x^2+4} \leqslant 0$;

10. $x^2-x \geqslant \dfrac{36}{x^2-x}$.

Вариант 2

1. $\dfrac{(x+1)^2}{(x+7)(x-6)} \leqslant 0$;

2. $\dfrac{\left(x^2-x-6\right)(x+2)}{x\left(1-x^2\right)} \geqslant 0$;

3. $(x+1)(x+2)(2x+3) > (x+1)(x+2)^2$;

4. $\dfrac{\left(x^2+6x+8\right)\left(x^2-4\right)}{\left(x^3+8\right)x} \geqslant 0$;

5. $\dfrac{4}{4-3x-x^2} \leqslant 1$;

6. $\dfrac{x^2-3x+2}{(x-3)(x-4)} \leqslant 1$;

7. $\left(\dfrac{4+x}{2-x}\right)^2 \geqslant 4$;

8. $\dfrac{x+3}{x-2} \geqslant \dfrac{x-4}{x+2}$;

9. $\dfrac{2(x+2)^2-3(x+2)+1}{x^4-5x^2+4} \leqslant 0$;

10. $x^2+x \geqslant \dfrac{36}{x^2+x}$.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $|x-4|<1$;
2. $\left|x^2-3x\right|>-1$;
3. $|2x+3|\geqslant 5$;
4. $\left|x^2+6x-7\right|\leqslant 0$;
5. $\left|\dfrac{3x-1}{x+2}\right|\leqslant 2$;
6. $\dfrac{(x+2)^2(x+3)}{|x^2+x-2|}\geqslant 0$;
7. $\dfrac{\left|x^2-x-12\right|}{x^4-5x^3+6x^2}\leqslant 0$;
8. $\dfrac{|x+1|-2}{x-2}\geqslant 2$;
9. $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-x-2\right|\leqslant 0$;
10. $\left|2x^2-x\right|\leqslant\dfrac{9}{|2x^2-x|}$.

Вариант 2

1. $|x+4|<1$;
2. $\left|x^2+3x\right|\geqslant -1$;
3. $|2x-3|\geqslant 5$;
4. $\left|x^2-6x-7\right|\leqslant 0$;
5. $\left|\dfrac{3x+1}{x-2}\right|\leqslant 2$;
6. $\dfrac{(x-2)^2(x-3)}{|x^2-x-2|}\leqslant 0$;
7. $\dfrac{\left|x^2+x-12\right|}{x^4+5x^3+6x^2}\leqslant 0$;
8. $\dfrac{2-|x-1|}{x+2}\geqslant 2$;
9. $\left|x^2-1\right|+\left|x^2+x-2\right|\leqslant 0$;
10. $\left|2x^2+x\right|\leqslant\dfrac{9}{|2x^2+x|}$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. $(3x-4)(x+2)(3-x)\left(x+\sqrt{2}\right)<0$;
2. $4x^2-3x-1\leqslant 0$;
3. $(2x-1)(x+1)\geqslant(3+x)(3-x)$;
4. $\dfrac{x^2-2x-15}{(x+2)(1-x)}\leqslant 0$;
5. $\dfrac{x^2}{x+2}\geqslant 1$;
6. $\dfrac{x}{x+5}<\dfrac{x+6}{x-5}$;
7. $\dfrac{(1-x)(1-2x)^2}{(x+3)(2x-3)^3}\geqslant 0$;
8. $\dfrac{\left(x^2-8x+15\right)\left(x^2-5x\right)}{4+3x-x^2}\geqslant 0$;
9. $\dfrac{|x+3|}{x^2+x-12}\geqslant 0$;
10. $\dfrac{3x^2-4x+1}{|x|-1}\geqslant 0$.

Вариант 2

1. $(3x+4)(x-2)(3+x)\left(\sqrt{2}-x\right)<0$;
2. $4x^2+3x-1\leqslant 0$;
3. $(2x+1)(x-1)\geqslant(3+x)(3-x)$;
4. $\dfrac{x^2+2x-15}{(2-x)(x+1)}\leqslant 0$;
5. $\dfrac{x^2}{2-x}\geqslant 1$;
6. $\dfrac{x}{x-5}<\dfrac{x-6}{x+5}$;
7. $\dfrac{(1-2x)(1-3x)^2}{(x+2)(2x-5)^3}\geqslant 0$;
8. $\dfrac{\left(x^2+8x+15\right)\left(x^2+5x\right)}{4-3x-x^2}\geqslant 0$;
9. $\dfrac{|x-3|}{x^2-x-12}\geqslant 0$;
10. $\dfrac{3x^2+4x+1}{|x|-1}\geqslant 0$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $(4x-7)(x+4)(2-x)\left(x-\sqrt{3}\right)<0;$

2. $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(x^2-5\right)\geqslant\sqrt{2}-1;$

3. $\dfrac{3x^2-x-14}{2x^2+x-10}\leqslant 0;$

4. $\dfrac{3x^2-5x+3}{-x^2+5x+6}\geqslant 0;$

5. $\dfrac{x^2}{x^2+4}\geqslant\dfrac{x^2+6}{x^2-4};$

6. $\dfrac{(2-x)(x+0,25)^3(3x+1)^2(x+2)}{|x+3|}\geqslant 0;$

7. $\dfrac{x^3}{3-2x}\leqslant 1;$

8. $\dfrac{x^2}{x+3}\leqslant\dfrac{x^2-4x}{x-2};$

9. $\dfrac{|x^2-4x|}{x^2-5x-6}\geqslant 0;$

10. $\dfrac{x^4-5x^2+4}{|x^2-5x|-6}\geqslant 0.$

Вариант 2

1. $(2x-5)\left(x-\sqrt{6}\right)(x+3)(4-x)<0;$

2. $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(x^2-10\right)\geqslant 2-\sqrt{3};$

3. $\dfrac{3x^2+x-14}{2x^2-x-10}\leqslant 0;$

4. $\dfrac{3x^2+5x+3}{6-5x-x^2}\geqslant 0;$

5. $\dfrac{x^2-9}{x^2-1}\geqslant\dfrac{x^2-6}{x^2};$

6. $\dfrac{(3-x)(x-0,25)^2(3x-1)^3(x+3)}{|x+4|}\geqslant 0;$

7. $\dfrac{x^3}{3+2x}\geqslant -1;$

8. $\dfrac{x^2}{x-3}\leqslant\dfrac{x^2+4x}{x+2};$

9. $\dfrac{|x^2+4x|}{x^2+5x-6}\geqslant 0;$

10. $\dfrac{x^4-5x^2+4}{6-|x^2+5x|}\leqslant 0.$

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $\dfrac{40}{40+3x-x^2} \geqslant 1;$

2. $\dfrac{1}{3x-5} \leqslant \dfrac{1}{x^2-2x+1};$

3. $\dfrac{x^3}{3-2x^2} > 1;$

4. $\dfrac{4x^2+13x+10}{4x+5} \leqslant \dfrac{1}{2x+3};$

5. $\dfrac{4x^4-5x^2+1}{2x^2-3x-5} \geqslant 2x^2+3x-5;$

6. $x^2-5|x| \geqslant 6;$

7. $\left|\dfrac{3+x}{1-x}\right| \leqslant 1;$

8. $\dfrac{|x^2-x|}{8+2|x|-x^2} > 0;$

9. $\dfrac{2|x|-1}{2|x|-3} \geqslant \dfrac{|x|-1}{|x|-4};$

10. $\left|x^2-5|x|\right| \leqslant 6.$

Вариант 2

1. $\dfrac{5}{5+4x-x^2} \leqslant 1;$

2. $\dfrac{-1}{3x+5} \leqslant \dfrac{1}{x^2+2x+1};$

3. $\dfrac{x^3}{4-3x^2} > 1;$

4. $\dfrac{4x^2-13x+10}{4x-5} \geqslant \dfrac{1}{2x-3};$

5. $\dfrac{4x^4-5x^2+1}{2x^2+3x-5} \geqslant 2x^2-3x-5;$

6. $x^2-4|x| \geqslant 5;$

7. $\left|\dfrac{3+x}{x+1}\right| \leqslant 1;$

8. $\dfrac{|x^2+x|}{6+|x|-x^2} > 0;$

9. $\dfrac{3|x|-2}{3|x|-4} \geqslant \dfrac{|x|-1}{|x|-3};$

10. $\left|x^2-4|x|\right| \leqslant 3.$

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. $\dfrac{7-5x}{x^2-5x+6} \leqslant 1;$

2. $\dfrac{2(2x-1)}{2x^2-3x-5} \leqslant \dfrac{3(2x-1)}{3x^2+5x-2};$

3. $\dfrac{x^3+2}{2x^2+x} \leqslant 1;$

4. $\dfrac{5x+4}{10x^2+13x+4} \leqslant 3x+2;$

5. $\dfrac{3x^2+7x-2}{9x^4-10x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{3x^2-7x+2};$

6. $\left|\dfrac{x^2+4}{x^2-3x-4}\right| \leqslant 1;$

7. $\dfrac{|x^2-1|-3}{2x^2-5x+2} \geqslant 0;$

8. $\dfrac{|x-3|-2|x+1|}{x^2-x-6} \geqslant 0;$

9. $\dfrac{4}{|x-3|-1} \geqslant |x-2|;$

10. $\dfrac{|x^2-4x|-5}{|x-2|-3} \geqslant 1;$

Вариант 2

1. $\dfrac{7+5x}{x^2+5x+6} \leqslant 1;$

2. $\dfrac{2(2x+1)}{2x^2+3x-5} \geqslant \dfrac{3(2x+1)}{3x^2-5x-2};$

3. $\dfrac{2-x^3}{2x^2-x} \leqslant 1;$

4. $\dfrac{5x-4}{10x^2-13x+4} \geqslant 3x-2;$

5. $\dfrac{3x^2-7x-2}{9x^4-10x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{3x^2+7x+2};$

6. $\left|\dfrac{x^2+5}{x^2+4x-5}\right| \leqslant 1;$

7. $\dfrac{2x^2+5x+2}{|x^2-1|-3} \geqslant 0;$

8. $\dfrac{|x+3|-2|x-1|}{x^2+x-6} \geqslant 0;$

9. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|;$

10. $\dfrac{|x^2+4x|-5}{|x+2|-3} \geqslant 1.$

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. $\dfrac{(3x+7)(x-3)^2}{(5-x^2)^3} < 0;$

2. $\dfrac{x^2+3x-13}{(x+3)(x-2)} \geqslant 2;$

3. $(|x|-1)^2\left(x^2-2\right) < (|x|-1)^2(6-2x);$

4. $\dfrac{x\left(9-x^2\right)\left|x^2-16\right|}{(x^2+6x-7)(x-1)} \geqslant 0;$

5. $\dfrac{\left(x^2+7x-8\right)^2+\left(x^3+2x-3\right)^2}{|x|-2} \geqslant 0;$

6. $\dfrac{x^2-1}{|x|-1} \leqslant 3;$

7. $\dfrac{|x-1|}{x^2-|x|} < 1;$

8. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+5}+\dfrac{x^3+3x^2-17x+11}{2x^2+9x-5} > 0 \\ x^3+5x^2-6|x| \leqslant 0 \end{cases};$

9. $\left|x^2-x\right| \leqslant \dfrac{36}{x^2-x};$

10. $\dfrac{\left|3x^2-4x+1\right|}{3x-1} \leqslant \dfrac{1}{2|x|-1}.$

Вариант 2

1. $\dfrac{(7-3x)(x+3)^2}{(5-x^2)^3} < 0;$

2. $\dfrac{x^2-3x-13}{(x-3)(x+2)} \geqslant 2;$

3. $(2|x|-1)^2\left(2x^2-1\right) < (2|x|-1)^2(3+2x);$

4. $\dfrac{x\left(9-x^2\right)\left|x^2-16\right|}{(x^2-6x-7)(x+1)} \geqslant 0;$

5. $\dfrac{\left(x^2-7x-8\right)^2+\left(x^2-2x-3\right)^2}{|x|-2} \geqslant 0;$

6. $\dfrac{4x^2-1}{2|x|-1} \leqslant 3;$

7. $\dfrac{|x+1|}{x^2-|x|} < 1;$

8. $\begin{cases} \dfrac{10}{5-x} - \dfrac{x^3-3x^2-17x-11}{2x^2-9x-5} > 0 \\ x^3-5x^2+6|x| \geqslant 0 \end{cases};$

9. $\left|x^2+x\right| \leqslant \dfrac{36}{x^2+x};$

10. $\dfrac{\left|3x^2+4x+1\right|}{3x+1} \leqslant \dfrac{1}{1-2|x|}.$

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{2-2x}{5}<\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-x-6\leqslant 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2+4x+1\geqslant 0, \\ 3x^2+5x+2<0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+7x-18\leqslant 0, \\ (x+1)^2-4(x+1)+3\geqslant 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x^2-8}{2x+7}>1, \\ \dfrac{6+x}{2}-\dfrac{3x+2}{5}\leqslant 2x+9; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+11}{x^2+x-2}+\dfrac{7}{1-x}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+3}+\dfrac{3x+8}{x+3}\geqslant 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x^2-x\leqslant \dfrac{9}{2x^2-x}, \\ \dfrac{|x-1|}{x^2-x-6}\geqslant 0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-3x}>\dfrac{x-2}{4}, \\ |2x-5|\leqslant \dfrac{3}{x}; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x-1}\geqslant \dfrac{x}{x+1}, \\ \left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|\geqslant x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \left(\dfrac{12x-3}{(x+1)(2x+3)}-1\right)(x+1-|2x-1|)(2-x)\leqslant 0, \\ x^2-3x>\dfrac{16}{x^2-3x}; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \left(x^2+5x+6\right)\left(x^2+5x+8\right)<8, \\ \left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)\leqslant 6. \end{cases}$

Вариант 2

1. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3}+\dfrac{2+2x}{5} > -\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2+x-6 \leqslant 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2-4x+1 \geqslant 0, \\ 3x^2-5x+2 < 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2-7x-18 \leqslant 0, \\ (x-1)^2+4(x-1)+3 \geqslant 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x^2-8}{7-2x} > 1, \\ \dfrac{6-x}{2}+\dfrac{3x-2}{5} \leqslant 9-2x; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+11}{x^2-x-2}+\dfrac{7}{1+x} \leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-6x+6}{x^2-4x+3}+\dfrac{3x-8}{x-3} \geqslant 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x^2+x \leqslant \dfrac{9}{2x^2+x}, \\ \dfrac{|x+1|}{x^2+x-6} \geqslant 0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+3x} < \dfrac{x+2}{4}, \\ |2x+5| \leqslant -\dfrac{3}{x}; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x+1} \leqslant \dfrac{x}{1-x}, \\ \left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| \geqslant -x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \left(\dfrac{12x+3}{(x-1)(2x-3)}+1\right)(1-x-|2x+1|)(2+x) \geqslant 0, \\ x^2+3x > \dfrac{16}{x^2+3x}; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x+8\right) < 8, \\ \left(x^2-1\right) \leqslant \dfrac{6}{x^2+4}. \end{cases}$

Самостоятельная работа 10

1 вариант

1. $\dfrac{6x^5 - 11x^4 - 11x + 6}{(2x^2 + 3x + 1)^2} \geqslant 0;$

2. $\dfrac{(x+1)^6 - (x^2+1)^3}{x^4 - 5x^2 + 4} \leqslant 0;$

3. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \geqslant 0;$

4. $\dfrac{2x}{4x^2 + 3x + 8} + \dfrac{3x}{4x^2 - 6x + 8} > \dfrac{1}{6};$

5. $32x^4 - 48x^3 - 10x^2 + 21x + 5 < 0;$

6. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \leqslant \dfrac{10}{9};$

7. $(x^2 + 2x - 1)(2x^2 + 4x - 1) \leqslant 10;$

8. $\dfrac{x^3 + 2x - 2}{x^3 + 2x - 3} \geqslant \dfrac{x^3 + x + 3}{x^3 + x + 2};$

9. $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1} + \dfrac{x^2 + 8x + 20}{x+4} > \dfrac{x^2 + 4x + 6}{x+2} + \dfrac{x^2 + 6x + 12}{x+3};$

10. $\dfrac{4x^2}{(x+2)^2} + x^2 < 5.$

2 вариант

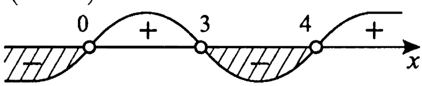
1. $\dfrac{6x^5 + 11x^4 - 11x - 6}{(2x^2 - 3x + 1)^2} \leqslant 0;$
2. $\dfrac{(x-1)^6 - \left(x^2+1\right)^3}{x^4 - 5x^2 + 4} \leqslant 0;$
3. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \geqslant 0;$
4. $\dfrac{2x}{4x^2 - 3x + 8} + \dfrac{3x}{4x^2 + 6x + 8} < -\dfrac{1}{6};$
5. $32x^4 + 48x^3 - 10x^2 - 21x + 5 < 0;$
6. $\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{2x-1}\right)^2 \leqslant \dfrac{10}{9};$
7. $\left(x^2 - 2x - 1\right)\left(2x^2 - 4x - 1\right) \leqslant 10;$
8. $\dfrac{x^3 + 2x + 2}{x^3 + 2x + 3} \geqslant \dfrac{x^3 + x - 3}{x^3 + x - 2};$
9. $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} + \dfrac{x^2 - 8x + 20}{x - 4} \leqslant \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x - 2} + \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 3};$
10. $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x-2)^2} < 5.$

5

Решения и ответы

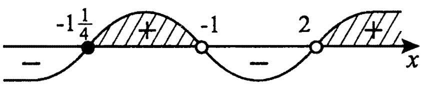
Решение проверочной работы 1

1. $\dfrac{x-4}{(x-3)x} < 0.$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; 4).$

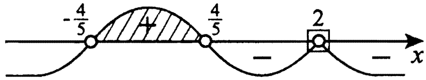
2. $\dfrac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geqslant 0.$



Ответ: $\left[-1\dfrac{1}{4}; -1\right) \cup (2; +\infty).$

3. $\dfrac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0.$

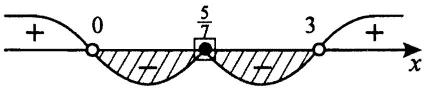
$\dfrac{(4-5x)(4+5x)}{(x-2)^2} > 0.$



Ответ: $\left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{4}{5}\right).$

4. $\dfrac{49x^2-70x+25}{x^2-3x} \leqslant 0.$

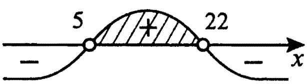
$\dfrac{(7x-5)^2}{x(x-3)} \leqslant 0.$



Ответ: $(0;3)$.

5. $\dfrac{4x-3}{x-5} > 5.$

$\dfrac{4x-3-5(x-5)}{x-5} > 0;\ \dfrac{4x-3-5x+25}{x-5} > 0;\ \dfrac{22-x}{x-5} > 0$

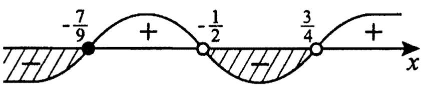


Ответ: $(5;22)$.

6. $\dfrac{6x+1}{4x-3} \leqslant \dfrac{3x+2}{2x+1}.$

$\dfrac{(6x+1)(2x+1)-(3x+2)(4x-3)}{(4x-3)(2x+1)} \leqslant 0;$

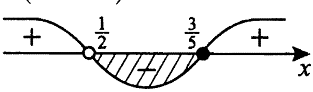
$\dfrac{12x^2+8x+1-12x^2+x+6}{(4x-3)(2x+1)} \leqslant 0;\ \dfrac{9x+7}{(4x-3)(2x+1)} \leqslant 0.$



Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{9}\right] \cup \left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

7. $\dfrac{6}{-4x+2} - \dfrac{5x}{1-2x} \leqslant 0.$

$\dfrac{6}{2(1-2x)} - \dfrac{5x}{1-2x} \leqslant 0;\ \dfrac{3-5x}{1-2x} \leqslant 0;\ \dfrac{5x-3}{2x-1} \leqslant 0.$



Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{5}\right]$.

8. $\dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\dfrac{3x+1}{3x-12}\leqslant 0.$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1+3)(x-1-3)}-\frac{3x+1}{3(x-4)}\leqslant 0;$$

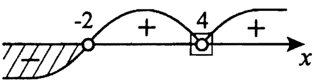
$$\frac{x^2+3x-2}{(x+2)(x-4)}-\frac{3x+1}{3(x-4)}\leqslant 0;$$

$$\frac{3x^2+9x-6-(3x+1)(x+2)}{3(x+2)(x-4)}\leqslant 0;$$

$$\frac{3x^2+9x-6-3x^2-7x-2}{3(x+2)(x-4)}\leqslant 0;$$

$$\frac{2x-8}{3(x+2)(x-4)}\leqslant 0.$$

$$\begin{cases} x\neq 4,\\ \dfrac{1}{x+2}\leqslant 0.\end{cases}$$



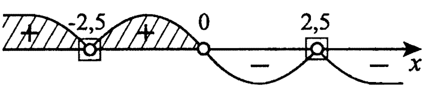
Ответ: $(-\infty;-2)$.

9. $\dfrac{1}{2x^2-5x}-\dfrac{2}{25+10x}+\dfrac{4}{25-4x^2}\geqslant 0.$

$$\frac{1}{x(2x-5)}-\frac{2}{5(5+2x)}+\frac{4}{(5+2x)(5-2x)}\geqslant 0;$$

$$\frac{5(2x+5)-2x(2x-5)-4\cdot 5x}{5x(2x-5)(2x+5)}\geqslant 0;$$

$$\frac{-4x^2+25}{5x(2x-5)(2x+5)}\geqslant 0;\quad \frac{(5+2x)(5-2x)}{5x(2x-5)(2x+5)}\geqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;-2{,}5)\cup(-2{,}5;0)$.

10. $\left(\dfrac{4}{x^2+4x}+\dfrac{32-3x}{x^3+64}\right):\dfrac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geqslant\dfrac{4}{4+x}.$

$$\left(\frac{4}{x(x+4)}+\frac{32-3x}{(x+4)(x^2-4x+16)}\right)\cdot\frac{x(x^2-4x+16)}{x+8}-\frac{4}{4+x}\geqslant 0;$$

$x\neq -8.$

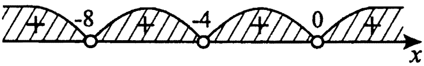
$$\frac{4(x^2-4x+16)+(32-3x)x}{x(x+4)(x^2-4x+16)}\cdot\frac{x(x^2-4x+16)}{x+8}-\frac{4}{4+x}\geqslant 0;$$

$$\frac{(x^2+16x+64)x(x^2-4x+16)}{(x+8)x(x+4)(x^2-4x+16)}-\frac{4}{4+x}\geqslant 0\quad (x\neq 0);$$

$\dfrac{(x+8)^2}{(x+4)(x+8)}-\dfrac{4}{4+x}\geqslant 0$ (так как $x^2-4x+16>0$ при всех x).

$$\frac{x+8}{x+4}-\frac{4}{4+x}\geqslant 0;\quad \frac{x+8-4}{x+4}\geqslant 0;\quad \frac{x+4}{x+4}\geqslant 0;$$

$$1\geqslant 0,\ \text{но}\ \begin{cases} x\neq 0,\\ x\neq -4,\\ x\neq -8.\end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;-8)\cup(-8;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$.

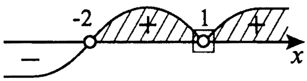
Решение проверочной работы 2

1. $(x^2 + x + 2)(x + 2)(1 - x)^2 > 0.$

$x^2 + x + 2 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -7 < 0; \end{cases}$

$(x + 2)(1 - x)^2 > 0.$

Так как $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$, то вид неравенства канонический.



Ответ: $(-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

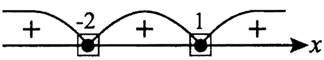
2. $(x^4 - x^2 + 2)(x^2 + x - 2)^2 \leqslant 0.$

$x^2 = t;$ $x^4 - x^2 + 2 = t^2 - t + 2$, но $t^2 - t + 2 > 0$ (при всех t), так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -7 < 0; \end{cases}$

$\Big((x + 2)(x - 1)\Big)^2 \leqslant 0.$ $(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1),$

$x_1 = -2;$ $x_2 = 1.$

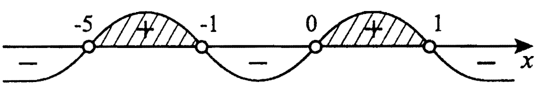
Корни $x_1 = -2;$ $x_2 = 1$ есть решение неравенства.



Ответ: $\{-2; 1\}$.

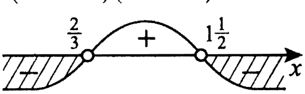
3. $(1 - x^2)^3(x^2 + 5x) > 0.$

$(1 - x)^3(1 + x)^3 \cdot x(x + 5) > 0$ — вид неканонический.



Ответ: $(-5; -1) \cup (0; 1)$.

4. $(3x - 2)(3 - 2x) < 0.$

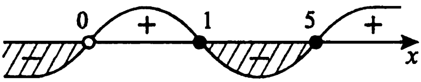


Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

5. $x + \dfrac{5}{x} \leqslant 6.$

$\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \leqslant 0$; $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$;

$\dfrac{(x-5)(x-1)}{x} \leqslant 0.$



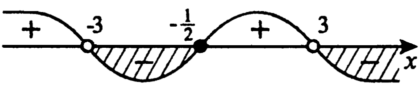
Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; 5]$.

6. $\dfrac{x-2}{x+3} \leqslant \dfrac{x+4}{x-3}.$

$\dfrac{(x-2)(x-3) - (x+3)(x+4)}{(x+3)(x-3)} \leqslant 0;$

$\dfrac{x^2 - 5x + 6 - x^2 - 7x - 12}{(x+3)(x-3)} \leqslant 0;$

$\dfrac{-6 - 12x}{(x+3)(x-3)} \leqslant 0$; $\dfrac{-6(2x+1)}{(x+3)(x-3)} \leqslant 0.$

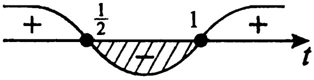


Ответ: $\left(-3; -\dfrac{1}{2}\right] \cup (3; +\infty)$.

7. $2(x+2)^2 - 3(x+2) + 1 \leqslant 0.$

Пусть $x + 2 = t$; $2t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$.

Так как $2t^2 - 3t + 1 = 2(t-1)\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$, то



$\begin{cases} t \leqslant 1, \\ t \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2 \leqslant 1, \\ x + 2 \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ x \geqslant -1{,}5. \end{cases}$

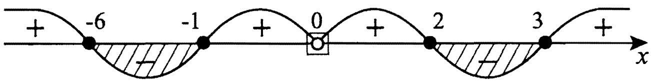
Ответ: $[-1{,}5; -1]$.

8. $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

Пусть $x+\dfrac{6}{x}=t.$

$$t^2+2t-35=(t+7)(t-5)=\left(x+\frac{6}{x}+7\right)\left(x+\frac{6}{x}-5\right)=$$
$$=\frac{x^2+7x+6}{x}\cdot\frac{x^2-5x+6}{x}.$$

Так как $x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$ и $x^2-5x+6=$ $=(x-3)(x-2)$, то $\dfrac{(x+6)(x+1)(x-3)(x-2)}{x^2}\leqslant 0.$



Ответ: $[-6;-1]\cup[2;3].$

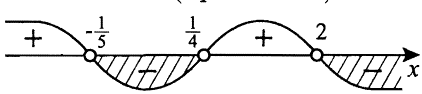
9. $\dfrac{(-20x^2+x+1)(x-2)}{x^2+3}<0.$

Пусть $20x^2-x-1=0.$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{40};\quad x_1=\dfrac{1}{4},\ x_2=-\dfrac{1}{5}.$

$-20x^2+x+1=-20\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\left(x+\dfrac{1}{5}\right);$

$x^2+3>0\quad$ (при всех x).



Ответ: $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{4}\right)\cup(2;+\infty).$

10. $\dfrac{(1-x^8)(1-x^6)(1-x^4)}{(1-x^3)(1+2x)^3}\leqslant 0.$

$1-x^8=(1-x^4)(1+x^4)=(1+x^2)(1+x^4)(1-x^2);$

$1-x^6=(1-x^3)(1+x^3)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2).$

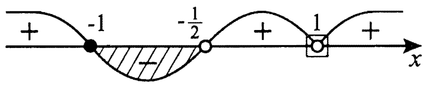
$1+x^4>0\quad$ (при всех x), $\ 1+x^2>0\quad$ (при всех x),

$x^2+x+1>0\quad$ (при всех x), $\ x^2-x+1>0\quad$ (при всех x),

$(1-x)^2=(x-1)^2.$

$$\frac{(1-x^2)(1-x)(1+x)(1-x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+2x)^3}\leqslant 0;$$

$$\frac{(1-x)^3(1+x)^3}{(1-x)(1+2x)^3}\leqslant 0.$$



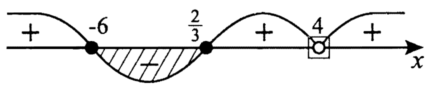
Ответ: $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right).$

11. $\left(\dfrac{x+1}{4-x}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{4}.$

$$\left(\frac{x+1}{4-x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{4-x}+\frac{1}{2}\right)\leqslant 0;$$

$$\frac{2(x+1)-(4-x)}{4-x}\cdot\frac{2(x+1)+4-x}{4-x}\leqslant 0;$$

$$\frac{(3x-2)(x+6)}{(4-x)^2}\leqslant 0.$$



Ответ: $\left[-6;\dfrac{2}{3}\right].$

12. $\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}.$

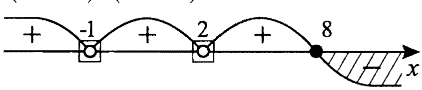
$x^2-6x+8=(x-4)(x-2),\quad x^2-x-2=(x-2)(x+1).$

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-\frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}\leqslant 0;\quad \frac{x-2}{x+1}\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}-\frac{x-4}{x-2}\right)\leqslant 0;$$

$$\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{(x-2)^2-(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)}\leqslant 0;$$

$$\frac{(x-2)(x^2-4x+4-x^2+3x+4)}{(x+1)^2(x-2)}\leqslant 0;$$

$$\frac{(x-2)(8-x)}{(x+1)^2(x-2)}\leqslant 0.$$



Ответ: $[8;+\infty).$

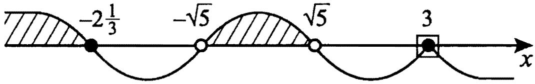
Решение проверочной работы 3

1. $\dfrac{(3x+7)(x-3)^2}{5-x^2} \geqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right.$ — корни знаменателя. $x=-2\frac{1}{3}$ — корень числителя. Выясним, что больше, $-\sqrt{5}$ или $-2\frac{1}{3}$.

Рассмотрим $-2\frac{1}{3}-(\sqrt{5})=\sqrt{5}-2\frac{1}{3}$. Допустим, что $\sqrt{5}\geqslant\frac{7}{3}$; $5\geqslant\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$ — ложь, значит $\sqrt{5}<2\frac{1}{3}$, тогда $-\sqrt{5}>-2\frac{1}{3}$.

$$\frac{(3x+7)(x-3)^2}{\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)} \geqslant 0.$$



Ответ: $\left(-\infty;-2\frac{1}{3}\right] \cup (-\sqrt{5};\sqrt{5}) \cup \{3\}$.

2. $\dfrac{\left(3x-\sqrt{11}\right)\left(\left(\sqrt{3}-2\right)x-\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{32}x+4\right)} \leqslant 0.$

$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{3}-2\right)^2;$

$$\frac{3\left(x-\frac{\sqrt{11}}{3}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(x-\left(\sqrt{3}-2\right)\right)}{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(4\sqrt{2}x+4\right)} \leqslant 0 \quad \left(\sqrt{3}<2\right);$$

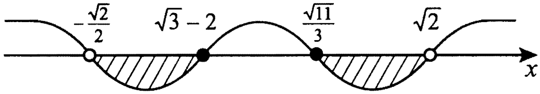
$$\frac{3\left(x-\frac{\sqrt{11}}{3}\right)\left(x-\left(\sqrt{3}-2\right)\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)4\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \leqslant 0.$$

Рассмотрим $\left(\sqrt{3}-2\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{3}-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Допустим, $\sqrt{3}>2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $2\sqrt{3}>4-\sqrt{2}$.

Возведем в квадрат $12>16-8\sqrt{2}+2$; $8\sqrt{2}>6$; $4\sqrt{2}>3$; $32>9$ — истина.

Тогда распределение корней на оси будет таким:



Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}-2\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{11}}{3}; \sqrt{2}\right)$.

3. $\dfrac{(6x^2-5x-1)(16x^2+2x-5)}{(9x^2+6x+1)(-2x^2+x+3)} \leqslant 0.$

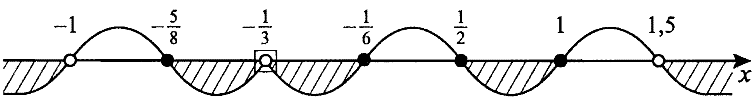
а) $6x^2-5x-1=(x-1)(6x+1)$.

б) $16x^2+2x-5=(2x-1)(8x+5)$.

в) $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$.

г) $-2x^2+x+3=-(x+1)(2x-3)$.

$$\frac{(x-1)(6x+1)(2x-1)(8x+5)}{-(3x+1)^2(x+1)(2x-3)} \leqslant 0.$$

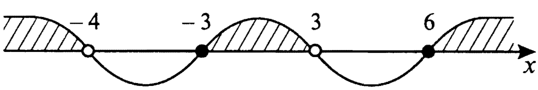


Ответ: $(-\infty;-1) \cup \left[-\dfrac{5}{8};-\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{6}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2};1\right] \cup (1{,}5;\infty)$.

4. $\dfrac{2x+3}{12-x-x^2}+0{,}5 \geqslant 0.$

$$\frac{4x+6+12-x-x^2}{12-x-x^2} \geqslant 0; \qquad \frac{-x^2+3x+18}{-x^2-x+12} \geqslant 0;$$

$$\frac{(x-6)(x+3)}{(x+4)(x-3)} \geqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;-4) \cup [-3;3) \cup [6;\infty)$.

5. $\dfrac{3x+9}{3x^2-4x+1} \geqslant \dfrac{6x+18}{6x^2+7x+1}$.

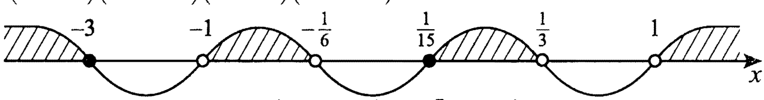
$3(x+3)\left(\dfrac{1}{3x^2-4x+1} - \dfrac{2}{6x^2+7x+1}\right) \geqslant 0;$

$\dfrac{3(x+3)(6x^2+7x+1-6x^2+8x-2)}{(3x^2-4x+1)(6x^2+7x+1)} \geqslant 0.$

а) $3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1);$

б) $6x^2+7x+1=(x+1)(6x+1).$

$\dfrac{3(x+3)(15x-1)}{(x-1)(3x-1)(x+1)(6x+1)} \geqslant 0.$



Ответ: $(-\infty;-3] \cup \left(-1;-\dfrac{1}{6}\right) \cup \left[\dfrac{1}{15};\dfrac{1}{3}\right) \cup (1;\infty)$.

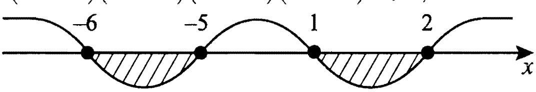
6. $(x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60 \leqslant 0.$

Пусть $x^2+4x=t$, тогда

$t^2-17t+60 \leqslant 0; \quad (t-5)(t-12) \leqslant 0.$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x-12) \leqslant 0;$

$(x+5)(x-1)(x+6)(x-2) \leqslant 0;$



Ответ: $[-6;-5] \cup [1;2]$.

7. $x(x+1)(x+2)(x+3) \geqslant 24.$

$x(x+3)=x^2+3x; \quad (x+1)(x+2)=x^2+3x+2.$

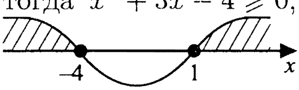
Положим $x^2+3x=t$.

$t(t+2) \geqslant 24; \quad t^2+2t-24 \geqslant 0; \quad (t+6)(t-4) \geqslant 0.$

$(x^2+3x+6)(x^2+3x-4) \geqslant 0.$

$x^2+3x+6>0$ (при всех x),

тогда $x^2+3x-4 \geqslant 0; \quad (x+4)(x-1) \geqslant 0$



Ответ: $(-\infty;-4] \cup [1;\infty)$.

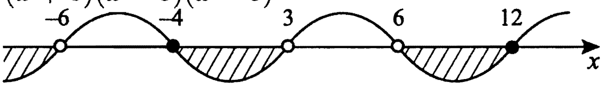
8. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{7}{x-3}\leqslant\dfrac{5}{x-6}$.

$$\frac{(x-3)(x-6)+7(x+6)(x-6)-5(x+6)(x-3)}{(x+6)(x-3)(x-6)}\leqslant 0;$$

$$\frac{x^2-9x+18+7x^2-252-5x^2-15x+90}{(x+6)(x-3)(x-6)}\leqslant 0;$$

$$\frac{3x^2-24x-144}{(x+6)(x-3)(x-6)}\leqslant 0; \qquad \frac{3(x^2-8x-48)}{(x+6)(x-3)(x-6)}\leqslant 0;$$

$$\frac{3(x-12)(x+4)}{(x+6)(x-3)(x-6)}\leqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;-6)\cup[-4;3)\cup(6;12]$.

9. $\left(\dfrac{1-x}{3x^2-4x+1}-\dfrac{x+1}{2x^2-3x-5}\right)(6x^2-17x+5)\geqslant 0$.

а) $3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$;

б) $2x^2-3x-5=(x+1)(2x-5)$;

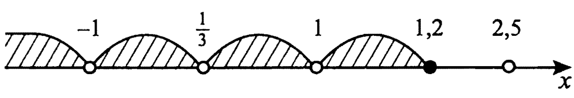
в) $6x^2-17x+5=(2x-5)(3x-1)$.

$$\left(\frac{1-x}{(x-1)(3x-1)}-\frac{x+1}{(x+1)(2x-5)}\right)(2x-5)(3x-1)\geqslant 0;$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{-1}{3x-1}-\dfrac{1}{2x-5}\right)(2x-5)(3x-1)\geqslant 0,\\ x\neq\pm1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(-2x+5-3x+1)(2x-5)(3x-1)}{(3x-1)(2x-5)}\geqslant 0,\\ x\neq\pm1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}6-5x\geqslant 0,\\ x\neq\pm1,\\ x\neq 2{,}5,\\ x\neq\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)\cup(1;1{,}2]$.

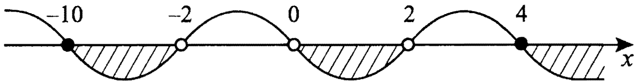
10. $\dfrac{6}{x^2-2x} - \dfrac{12}{x^2+2x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{6}{x(x-2)} - \frac{12}{x(x+2)} - \frac{1}{x} \leqslant 0;$$

$$\frac{6(x+2) - 12(x-2) - (x+2)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{6x+12-12x+24-x^2+4}{x(x+2)(x-2)} \leqslant 0;$$

$$\frac{-x^2-6x+40}{x(x+2)(x-2)} \leqslant 0; \qquad \frac{-(x+10)(x-4)}{x(x+2)(x-2)} \leqslant 0.$$



Ответ: $[-10; -2) \cup (0; 2) \cup [4; \infty)$.

Решение проверочной работы 4

1. $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20.$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 15 \geqslant 20 \\ 2x^2 - 9x + 15 \leqslant -20; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x - 5 \geqslant 0 \\ 2x^2 - 9x + 35 \leqslant 0. \end{array}\right.$$

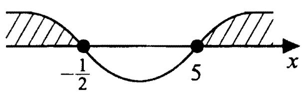
$2x^2 - 9x - 5 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4},$$

тогда $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1).$

$2x^2 - 9x + 35 > 0$ (при всех x), так как $\begin{cases} a = 2 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$(x - 5)(2x + 1) \geqslant 0.$



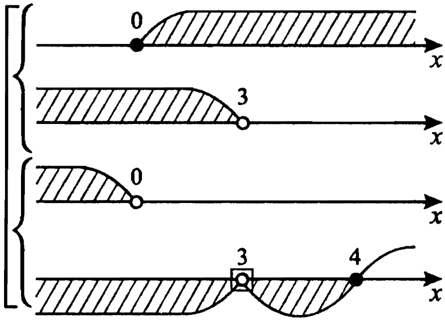
Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [5; \infty).$

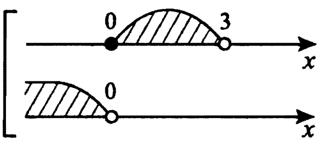
2. $\dfrac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geqslant 2x.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3} \geqslant 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{2x^2 - 6x - x^2 + x + 12}{x - 3} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{2x^2 - 6x - x^2 - x + 12}{x - 3} \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как $x^2 - 5x + 12 > 0$ для всех x, то





Ответ: $(-\infty; 3)$.

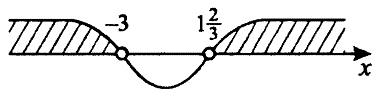
3. $|x^2 + 3x - 15| < 2x^2 + x$.

$\begin{cases} x^2 + 3x - 15 < 2x^2 + x, \\ x^2 + 3x - 15 > -2x^2 - x; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^2 - 2x + 15 > 0, \\ 3x^2 + 4x - 15 > 0; \end{cases}$

$x^2 - 2x + 15 > 0$ (при всех x);

$3x^2 + 4x - 15 = (3x - 5)(x + 3)$;

$(3x - 5)(x + 3) > 0$.



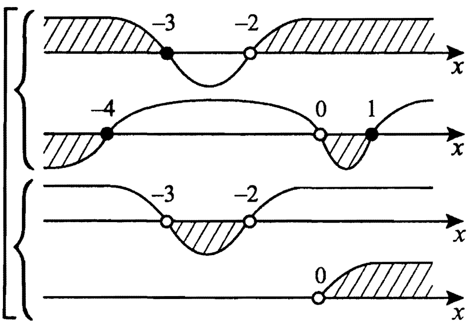
Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1\frac{2}{3}; \infty)$.

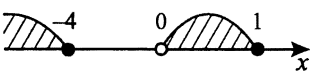
4. $\dfrac{|x^2 + 5x + 6|}{x + 2} \leqslant \dfrac{4}{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 5x + 6 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} \leqslant \dfrac{4}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 5x + 6 < 0, \\ -\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} \leqslant \dfrac{4}{x}; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(x+3) \geqslant 0, \\ x \neq -2, \\ x+3 \leqslant \dfrac{4}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ -(x+3) \leqslant \dfrac{4}{x}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(x+3) \geqslant 0, \\ x \neq -2, \\ \dfrac{x^2+3x-4}{x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ \dfrac{x^2+3x+4}{x} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(x^2+3x+4>0 \text{ для всех } x). \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(x+3) \geqslant 0, \\ x \neq -2, \\ \dfrac{(x+4)(x-1)}{x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+2)(x+3) < 0, \\ \dfrac{1}{x} \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$





Ответ: $(-\infty; -4] \cup (0; 1]$.

5. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x|+5} \geqslant 1$.

Так как $x^2+|x|+5>0$ для всех x, то

$|x^2-4x|+3 \geqslant x^2+|x|+5$;

$|x^2-4x| \geqslant x^2+|x|+2$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x \geqslant x^2+|x|+5 \\ x^2-4x \leqslant -x^2-|x|-5; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} |x| \leqslant -4x-5 \\ |x| \leqslant -2x^2+4x-5; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant -4x-5, \\ x \geqslant 4x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -2x^2+4x-5, \\ x \geqslant 2x^2-4x+5; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant -1, \\ x \leqslant -\dfrac{5}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2-3x+5 \leqslant 0, \\ 2x^2-5x+5 \leqslant 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

(так как $2x^2-3x+5>0$ для всех x, то $x \leqslant -1$).

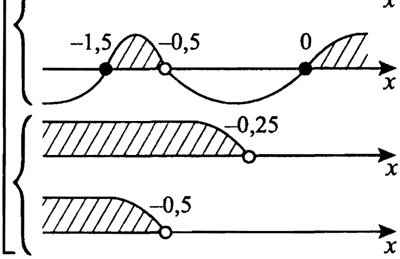
Ответ: $(-\infty;-1]$.

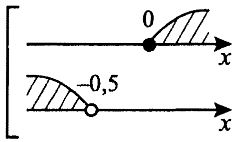
6. $\dfrac{4x^2+5x+1}{|4x+1|} \geqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4x+1>0, \\ \dfrac{4x^2+5x+1}{4x+1} \geqslant \dfrac{1}{2x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+1<0, \\ -\dfrac{4x^2+5x+1}{4x+1} \geqslant \dfrac{1}{2x+1}; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-0{,}25, \\ x+1 \geqslant \dfrac{1}{2x+1} \end{cases} \\ \begin{cases} x<-0{,}25, \\ -(x+1) \geqslant \dfrac{1}{2x+1}. \end{cases}\end{array}\right.$$

так как $4x^2+5x+1=(x+1)(4x+1)$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>-0{,}25, \\ \dfrac{2x^2+3x}{2x+1} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-0{,}25, \\ \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1} \leqslant 0; \end{cases}\end{array}\right. \qquad (2x^2+3x+2>0 \quad \text{для всех } x).$$

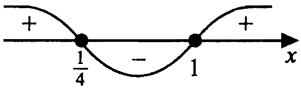




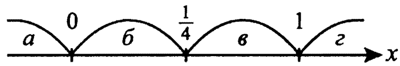
Ответ: $(-\infty;-0{,}5) \cup [0;\infty)$.

7. $\dfrac{|4x^2-5x+1|}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{2|x|-1}.$

Так как $4x^2-5x+1=(x-1)(4x-1)$,



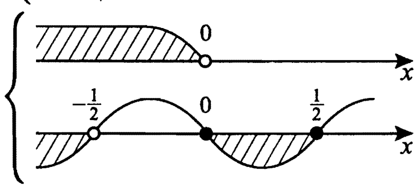
$\dfrac{|(4x-1)(x-1)|}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{2|x|-1}.$



а) $\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{-2x-1}; \end{cases} \quad \left((-\infty;0) \subset \left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]\right);$

$\begin{cases} x<0, \\ x-1 \leqslant \dfrac{1}{-2x-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0, \\ x-1+\dfrac{1}{2x+1} \leqslant 0; \end{cases}$

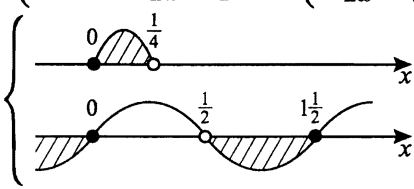
$\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{2x^2-x}{2x+1} \leqslant 0; \end{cases}$



$x<-\dfrac{1}{2}.$

б) $\begin{cases} 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ x-1 \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x < \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2x^2-3x}{2x-1} \leqslant 0; \end{cases}$

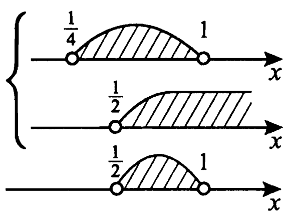


$x=0.$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{4} < x < 1, \\ \dfrac{-(4x-1)(x-1)}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{4} < x < 1, \\ -(x-1) \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{1}{4} < x < 1, \\ x - 1 + \dfrac{1}{2x-1} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{4} < x < 1, \\ \dfrac{2x^2-3x+2}{2x-1} \geqslant 0; \end{cases}$

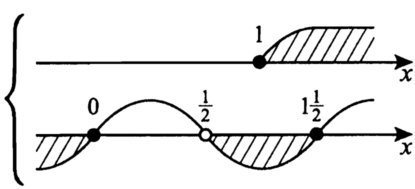
$(2x^2 - 3x + 2 > 0$ при всех $x)$ $\begin{cases} \dfrac{1}{4} < x < 1, \\ \dfrac{1}{2x-1} \geqslant 0. \end{cases}$



$\dfrac{1}{2} < x < 1.$

г) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \dfrac{4x^2-5x+1}{4x-1} \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x - 1 \leqslant \dfrac{1}{2x-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \dfrac{2x^2-3x}{2x-1} \leqslant 0; \end{cases}$

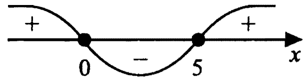


$1 \leqslant x \leqslant 1{,}5.$

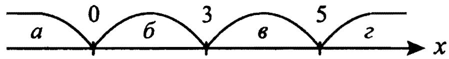
Ответ: $(-\infty; -0{,}5) \cup \{0\} \cup (0{,}5; 1{,}5]$.

8. $\dfrac{|x^2-5x|+6}{|x-3|x} \geqslant 1{,}5.$

Знаки для $y = x^2 - 5x$

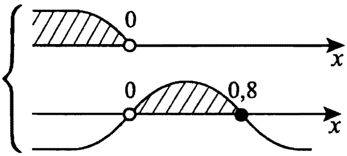


Корни модулей



а) $\begin{cases} x < 0, \quad \left(\begin{array}{l} |x^2-5x| = x^2-5x \\ |x-3| = 3-x \end{array}\right) \\ \dfrac{x^2-5x+6}{-(x-3)x} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{x-2}{-x} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$

$\begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{2x-4+3x}{-x} \geqslant 0; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{5x-4}{-x} \geqslant 0; \end{cases}$



нет решений.

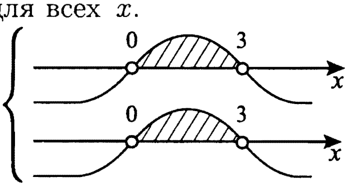
б) $\begin{cases} 0 < x < 3, \quad \left(\begin{array}{l} |x^2-5x| = 5x-x^2 \\ |x-3| = 3-x \end{array}\right) \\ \dfrac{-x^2+5x+6}{-x(x-3)} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{x^2-5x-6}{x(x-3)} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{2x^2-10x-12-3x^2+9x}{x(x-3)} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{-x^2-x-12}{x(x-3)} \geqslant 0. \end{cases}$

$x^2 + x + 12 > 0$ для всех x.

$\begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{-1}{x(x-3)} \geqslant 0. \end{cases}$



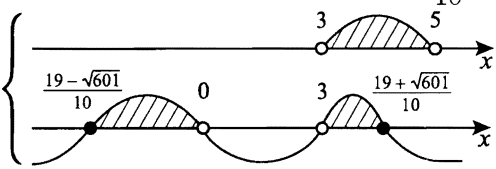
$0 < x < 3.$

в) $\begin{cases} 3 < x < 5, \quad \begin{pmatrix} |x^2 - 5x| = 5x - x^2 \\ |x - 3| = x - 3 \end{pmatrix} \\ \dfrac{-x^2 + 5x + 6}{x(x-3)} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3 < x < 5, \\ \dfrac{-2x^2 + 10x + 12 - 3x^2 + 9x}{x(x-3)} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < x < 5, \\ \dfrac{-5x^2 + 19x + 12}{x(x-3)} \geqslant 0; \end{cases}$$

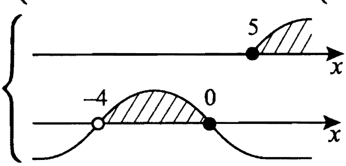
$$5x^2 - 19x - 12 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{601}}{10}.$$



$$\left(3; \frac{19 + \sqrt{601}}{10}\right].$$

г) $\begin{cases} x \geqslant 5, \quad \begin{pmatrix} |x^2 - 5x| = x^2 - 5x \\ |x - 3| = x - 3 \end{pmatrix} \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x(x-3)} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ \dfrac{x-2}{x} \geqslant 1{,}5; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 5, \\ \dfrac{2x - 4 - 3x}{x} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ \dfrac{-x - 4}{x} \geqslant 0. \end{cases}$



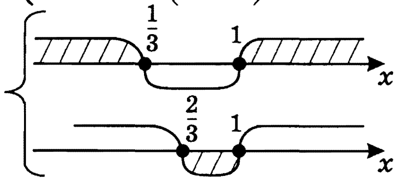
нет решений.

Ответ: $(0; 3) \cup \left(3; \dfrac{19 + \sqrt{601}}{10}\right]$.

Решение проверочной работы 5

1. $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 3(x-1)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \geqslant 0, \\ 3(x-1)\left(x - \dfrac{2}{3}\right) \leqslant 0. \end{cases}$$

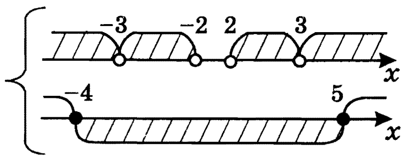


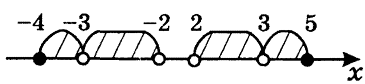
Ответ: $x = 1$.

2. $\begin{cases} \left(x^2 - 6|x| + 9\right)(|x| - 2) > 0, \\ x^2 - x - 20 \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (|x| - 3)^2 (|x| - 2) > 0, \\ (x-5)(x+4) \leqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} |x| \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2, \end{array}\right. \\ (x-5)(x+4) \leqslant 0. \end{cases}$$



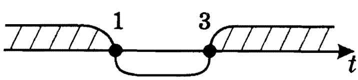


Ответ: $[-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5]$.

3. $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \leqslant 0, \\ (x-2)^2 - 4|x-2| + 3 \geqslant 0. \end{cases}$

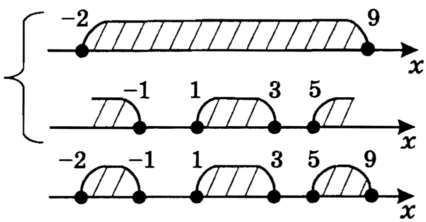
$x^2 - 7x - 18 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -2. \end{array}\right.$ $\begin{cases} (x-9)(x+2) \leqslant 0, \\ (x-2)^2 - 4|x-2| + 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Пусть $|x - 2| = t$. Тогда $t^2 - 4t + 3 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1. \end{array}\right.$



$$\begin{cases} (x-9)(x+2) \leqslant 0, \\ (|x-2|-3)(|x-2|-1) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-9)(x+2) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} |x-2| \geqslant 3 \\ |x-2| \leqslant 1; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-9)(x+2) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-2 \geqslant 3 \\ x-2 \leqslant -3, \\ \begin{cases} x-2 \leqslant 1, \\ x-2 \geqslant -1; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 9, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5 \\ x \leqslant -1, \\ \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 1. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



Ответ: $[-2;-1] \cup [1;3] \cup [5;9]$.

4. $\begin{cases} 10 \leqslant x^2 - 8x + 25 < 18, \\ 7 + 6\,|2x-3| - (2x-3)^2 \leqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0, \\ x^2 - 8x + 15 \geqslant 0, \\ 7 + 6\,|2x-3| - (2x-3)^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

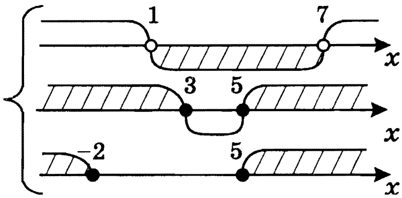
Пусть $|2x-3| = t \quad (t \geqslant 0)$.

$t^2 + 6t + 7 \leqslant 0, \quad -(t-7)(t+1) \leqslant 0.$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ -(t-7)(t+1) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ -(|2x-3|-7)(|2x-3|+1) \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ |2x-3| \geqslant 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3 \geqslant 7 \\ 2x-3 \leqslant -7; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-7) < 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5 \\ x \leqslant -2. \end{array}\right. \end{cases}$$

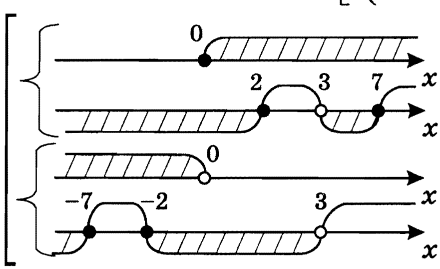


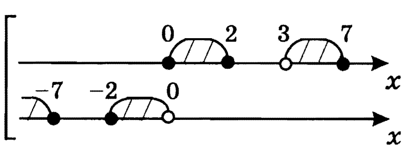
Ответ: $[5;7)$.

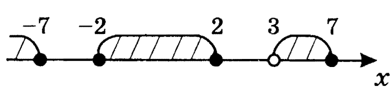
5. $\begin{cases} \dfrac{x^2-9|x|+14}{x-3} \leqslant 0, \\ |x-4|\,(|x+3|-8) < 0. \end{cases}$

а) $\dfrac{x^2-9|x|+14}{x-3} \leqslant 0$; $\quad |x|^2-9|x|+14=0$; $\quad \left[\begin{array}{l} |x|=7 \\ |x|=2. \end{array}\right.$

$\dfrac{(|x|-7)(|x|-2)}{x-3} \leqslant 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{(x-7)(x-2)}{x-3} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{(x+7)(x+2)}{x-3} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

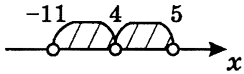




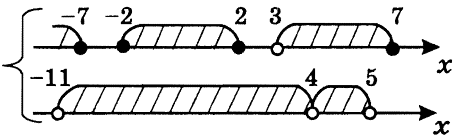


б) $|x-4|\,(|x+3|-8)<0;\quad \begin{cases} |x-4|\neq 0, \\ |x+3|<8; \end{cases}$

$\begin{cases} x\neq 4, \\ x+3<8, \\ x+3>-8; \end{cases}\qquad \begin{cases} x\neq 4, \\ x<5, \\ x>-11. \end{cases}$



в)



Ответ: $(-11;-7]\cup[-2;2]\cup(3;4)\cup(4;5)$.

6. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{x^2-x}+\left|\dfrac{4x^2+6}{x^2-x}\right|<6, \\ \left|x-1-x^2\right|<\left|-x-x^2+15\right|. \end{cases}$

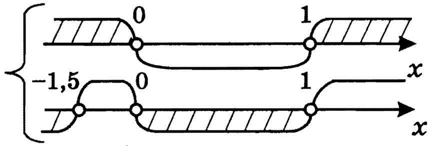
а) Пусть $\dfrac{2x^2+3}{x^2-x}=t;\quad t+2\,|t|<6;$

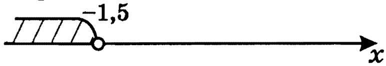
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\geqslant 0, \\ t<2 \end{cases} \\ \begin{cases} t\leqslant 0, \\ -t<6. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{x^2-x}\geqslant 0, \\ \dfrac{2x^2+3}{x^2-x}<2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{x^2-x}\leqslant 0, \\ \dfrac{2x^2+3}{x^2-x}>-6; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\,(x-1)>0, \\ \dfrac{2x^2+3-2x^2+2x}{x\,(x-1)}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\,(x-1)<0, \\ \dfrac{2x^2+3+6x^2-6x}{x\,(x-1)}>0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\,(x-1)>0, \\ \dfrac{2x+3}{x\,(x-1)}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\,(x-1)<0, \\ \dfrac{8x^2-6x+3}{x\,(x-1)}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

так как $8x^2 - 6x + 3 > 0$ (при всех x), $\begin{cases} a = 8 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$





$x < -1{,}5.$

б) $\left|x - 1 - x^2\right| < \left|-x - x^2 + 15\right|$;

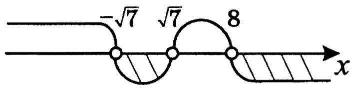
$|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$, и $|-\alpha| = |\alpha|$

$\left(x - 1 - x^2\right)^2 < \left(-x - x^2 + 15\right)^2$;

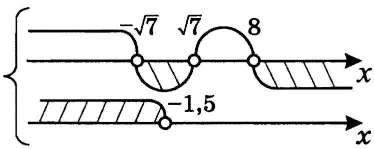
$\left(x^2 - x + 1 - x^2 - x + 15\right)\left(x^2 - x + 1 + x^2 + x - 15\right) < 0$;

$(16 - 2x)\left(2x^2 - 14\right) < 0$;

$4(8 - x)\left(x^2 - 7\right) < 0.$



в)



Ответ: $\left(-\sqrt{7}; -1,5\right)$.

7. $\begin{cases} \left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) < 180, \\ \dfrac{4}{|x + 1| - 2} \geqslant |x - 1|. \end{cases}$

а) $\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) < 180$;

$(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) < 180$,

перемножим первый множитель на четвертый и второй на третий:

$\left(x^2 - 6x + 5\right)\left(x^2 - 6x + 8\right) < 180.$

Пусть $x^2 - 6x + 5 = t$; $\quad t(t + 3) < 180$;

$t^2 + 3t - 180 < 0$; $\quad (t + 15)(t - 12) < 0$;

$\left(x^2 - 6x + 5 + 15\right)\left(x^2 - 6x + 5 - 12\right) < 0$;

$\left(x^2 - 6x + 20\right)\left(x^2 - 6x - 7\right) < 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 1) < 0$;

$x \in (-1; 7)$.

Учитывая, что $x^2-6x+20>0$ при всех x, так как $\begin{cases} a=1>0, \\ D<0. \end{cases}$

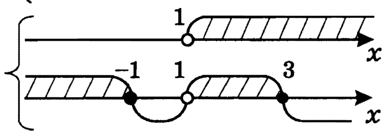
б) $\dfrac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|$,

тогда $|x+1|-2>0$; $\left[\begin{array}{l} x+1>2 \\ x+1<-2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-3. \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{4}{x+1-2} \geqslant x-1; \end{cases}$

$\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{4-(x-1)^2}{x-1} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{(2+x-1)(2-x+1)}{x-1} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>1, \\ \dfrac{(x+1)(3-x)}{x-1} \geqslant 0. \end{cases}$

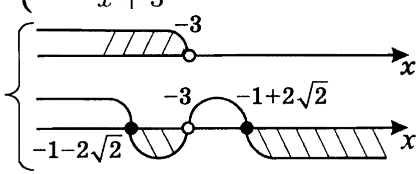


$x \in (1;3]$.

г) $\begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{4}{-x-1-2} \geqslant 1-x; \end{cases}$

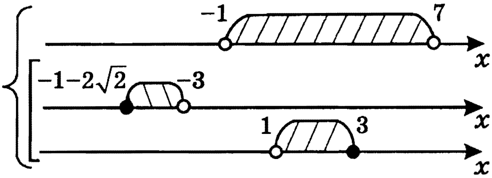
$\begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{4}{x+3}+1-x \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{4+(1-x)(x+3)}{x+3} \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{-x^2-2x+7}{x+3} \leqslant 0. \end{cases}$



$x \in \left[-1-2\sqrt{2}; -3\right)$.

д) При $|x+1|-2<0$ второе неравенство системы решений не имеет.

е) 

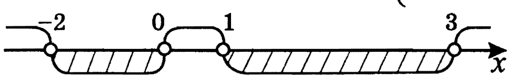
Ответ: $(1;3]$.

8. $$\begin{cases} x^2-x<\dfrac{36}{x^2-x}, \\ \left(\dfrac{12x-15}{2x^2+x}-1\right)(x-|2x-3|)(3-x)\leqslant 0. \end{cases}$$

а) $x^2-x<\dfrac{36}{x^2-x}$; $\quad \dfrac{\left(x^2-x\right)^2-36}{x^2-x}<0$;

$$\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-x+6\right)}{x^2-x}<0;$$

$x^2-x+6>0$ (при всех x), т.к. $\begin{cases} a=1, \\ D<0. \end{cases}$ $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)}<0.$



б) $\left(\dfrac{12x-15}{2x^2+x}-1\right)(x-|2x-3|)(3-x)\leqslant 0$;

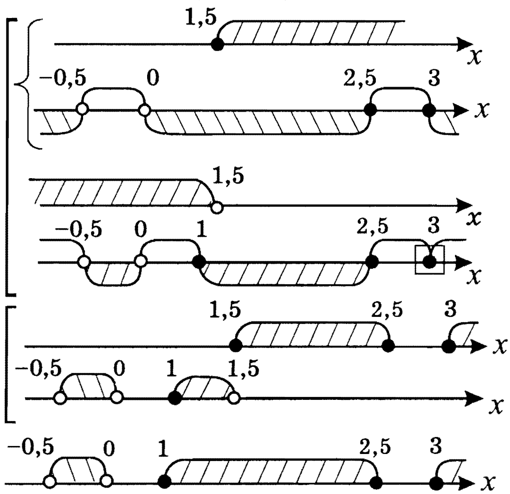
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3\geqslant 0, \\ \dfrac{12x-15-2x^2-x}{x(2x+1)}(x-2x+3)(3-x)\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3<0, \\ \dfrac{12x-15-2x^2-x}{x(2x+1)}(-3+3x)(3-x)\leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 1,5, \\ \dfrac{\left(-2x^2+11x-15\right)(3-x)^2}{x(2x+1)}\leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1,5, \\ \dfrac{\left(-2x^2+11x-15\right)3(x-1)(3-x)}{x(2x+1)}\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

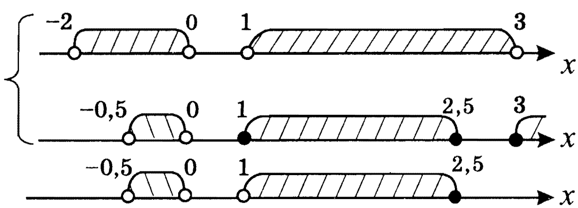
$$2x^2 - 11x + 15 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{4} = \frac{11 \pm 1}{4}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1,5, \\ \dfrac{-2\,(x-3)^3\,(x-2,5)}{x\,(2x+1)} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1,5, \\ \dfrac{6\,(x-3)^2\,(x-1)\,(x-2,5)}{x\,(2x+1)} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



в) Учтя результаты решения пункта а), получим



Ответ: $(-0,5; 0) \cup (1; 2,5]$.

Решение тренировочных карточек

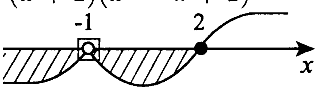
Решение тренировочной карточки 1

1. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \leqslant \dfrac{1-2x}{1+x^3}$.

$\dfrac{x^2-x+1-2(x+1)-1+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0$; $\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0$;

$x^2-x+1>0$ (при всех x) $\begin{cases} a=1>0, \\ D<0. \end{cases}$

$\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leqslant 0$; $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1} \leqslant 0$.



Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$.

2. $\dfrac{x^2}{x^2-7x+10} + \dfrac{16}{3x^2-12} \leqslant 1$.

$\dfrac{x^2}{(x-2)(x-5)} + \dfrac{16}{3(x-2)(x+2)} - 1 \leqslant 0$;

$\dfrac{3x^2(x+2)+16(x-5)-3(x-2)(x+2)(x-5)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leqslant 0$;

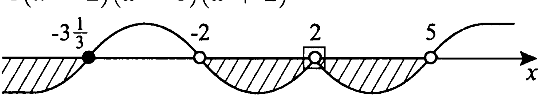
$\dfrac{3x^3+6x^2+16x-80-3x^3+15x^2+12x-60}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leqslant 0$;

$\dfrac{7(3x^2+4x-20)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leqslant 0$.

$3x^2+4x-20=(3x+10)(x-2)$;

$x_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{3} = \dfrac{-2\pm 8}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

$\dfrac{(3x+10)(x-2)}{3(x-2)(x-5)(x+2)} \leqslant 0$.

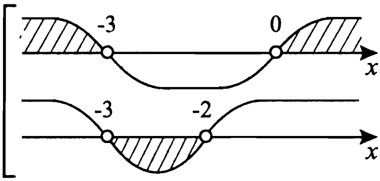


Ответ: $\left(-\infty;-3\dfrac{1}{3}\right]\cup(-2;2)\cup(2;5)$.

3. $|x^2+4x+3| > x+3.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x+3 > x+3 \\ x^2+4x+3 < -x-3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x(x+3) > 0 \\ x^2+5x+6 < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x(x+3) > 0 \\ (x+3)(x+2) < 0. \end{array}\right.$$



$(-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup (0;+\infty).$

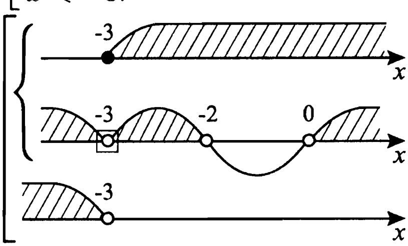
Другой способ:

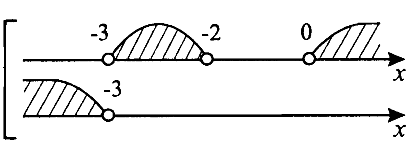
$$|x^2+4x+3| > x+3 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ |x^2+4x+3|^2 > (x+3)^2 \end{cases} \\ x+3 < 0; \end{array}\right.$$

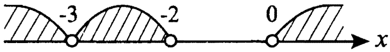
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ (x^2+4x+3+x+3)(x^2+4x+3-x-3) > 0 \end{cases} \\ x < -3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ (x^2+5x+6)(x^2+3x) > 0 \end{cases} \\ x < -3. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ (x+2)(x+3)x(x+3) > 0 \end{cases} \\ x < -3. \end{array}\right.$$







Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$.

4. $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2 - |x| - 2} \geqslant -3x.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2 - x - 2} \geqslant -3x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2 + x - 2} \geqslant -3x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant -3x, \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{1+x}{x-1} \geqslant -3x, \\ x \neq -2; \end{cases} \end{array}\right.$$

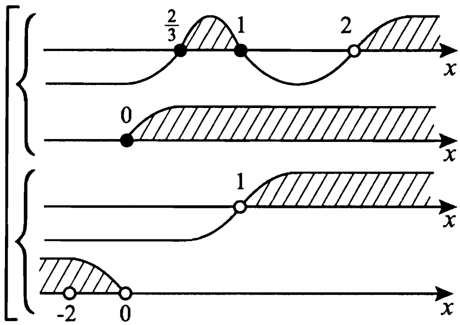
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x + 2 + 3x^2 - 6x}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1 + x + 3x^2 - 3x}{x-1} \geqslant 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x-1} \geqslant 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$3x^2 - 5x + 2 = (3x-2)(x-1);$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

$3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x, т.к. $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ D < 0. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{(3x-2)(x-1)}{x-2} \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \geqslant 0, \\ x < 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

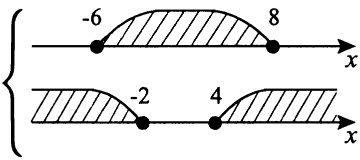


нет решений.

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

5. $||x-1|-5| \leqslant 2$. $\quad \begin{cases} |x-1|-5 \leqslant 2, \\ |x-1|-5 \geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1| \leqslant 7, \\ |x-1| \geqslant 3; \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \leqslant 7, \\ x-1 \geqslant -7, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x-1 \geqslant 3 \\ x-1 \leqslant -3; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 8, \\ x \geqslant -6, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 4 \\ x \leqslant -2. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

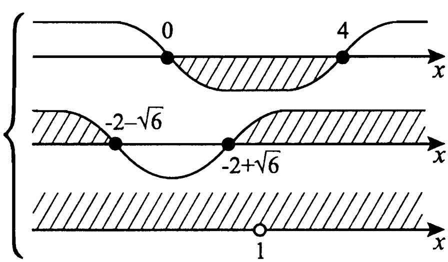


Ответ: $[-6; -2] \cup [4; 8]$.

6. $\dfrac{4x-1}{|x-1|} \geqslant |x+1|$.

$\begin{cases} 4x-1 \geqslant |x^2-1|, \\ x \neq 1; \end{cases}$ (так как $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$)

$\begin{cases} x^2-1 \leqslant 4x-1, \\ x^2-1 \geqslant 1-4x, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x \leqslant 0, \\ x^2+4x-2 \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$



$[-2+\sqrt{6}; 1) \cup (1; 4]$.

Другой способ:

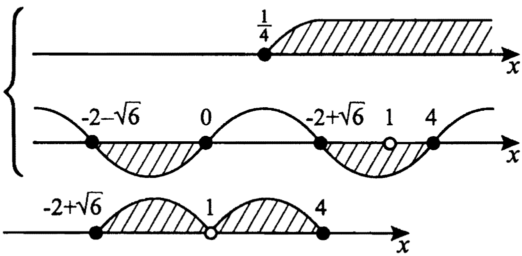
$$\frac{4x-1}{|x-1|} \geqslant |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-1| \leqslant 4x-1, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-1 \geqslant 0, \\ (|x^2-1|)^2 \leqslant (4x-1)^2, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4}, \\ (x^2-1-4x+1)(x^2-1+4x-1) \leqslant 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4}, \\ (x^2-4x)(x^2+4x-2) \leqslant 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4}, \\ x(x-4)(x^2+4x-2) \leqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$



Выясним, что больше $-2+\sqrt{6}$ или $\frac{1}{4}$?

Пусть $-2+\sqrt{6} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{6} > 2\frac{1}{4} \Leftrightarrow 6 > \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$.

Ответ: $[-2+\sqrt{6}; 1) \cup (1; 4]$.

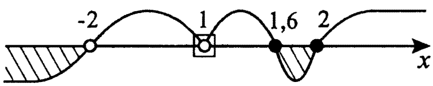
Решение тренировочной карточки 2

1. $\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x-2}$.

$\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2 - \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x-2} \leqslant 0$; $\dfrac{x-2}{x-1}\left(\dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{x-4}{x+2}\right) \leqslant 0$;

$\dfrac{x-2}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-4-(x-4)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0$; $\dfrac{x-2}{x-1}\cdot\dfrac{5x-8}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0$.

$\dfrac{(x-2)(5x-8)}{(x+2)(x-1)^2} \leqslant 0$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [1{,}6; 2]$.

2. $\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{4}{2x^2+7x+6} \leqslant \dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

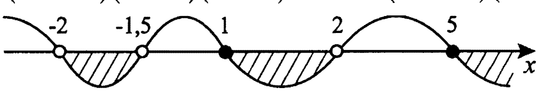
$2x^2+7x+6 = (2x+3)(x+2)$.

$2x^3+3x^2-8x-12 = x^2(2x+3) - 4(2x+3) =$
$= (2x+3)(x-2)(x+2)$.

$\dfrac{4}{(2x+3)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{1}{(2x+3)} -$
$- \dfrac{4}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leqslant 0$;

$\dfrac{4(x-2)+2x+3-x^2+4-4}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leqslant 0$;

$\dfrac{-x^2+6x-5}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leqslant 0$; $\dfrac{-(x-1)(x-5)}{(2x+3)(x+2)(x-2)} \leqslant 0$.

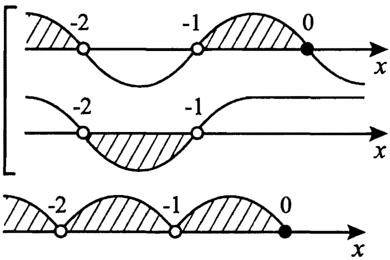


Ответ: $(-2; -1{,}5) \cup [1; 2) \cup [5; +\infty)$.

3. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \geqslant 1$.

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \leqslant -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2-3x+2+x^2+3x+2}{x^2+3x+2} \leqslant 0; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-6x}{(x+2)(x+1)} \geqslant 0 \\ \dfrac{2(x^2+2)}{(x+2)(x+1)} \leqslant 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0]$.

4. $||x+5|-2| < x+1$.

$$\begin{cases} |x+5| - 2 < x+1, \\ |x+5| - 2 > -x-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+5| < x+3, \\ |x+5| > 1-x; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x+5 < x+3, \\ x+5 > -x-3, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x+5 > 1-x \\ x+5 < x-1; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 5 < 3, \\ x > -4, \\ \left[\begin{array}{l} x > -2 \\ 5 < -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \text{нет решений.}$$

Другой способ:

$$||x+5|-2| < x+1 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ (||x+5|-2|)^2 < (x+1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ (|x+5| - 2 - x - 1)(|x+5| - 2 + x + 1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ (|x+5| - x - 3)(|x+5| + x - 1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \quad (|x+5| = x+5) \\ (x+5-x-3)(x+5+x-1) < 0; \end{cases}$$

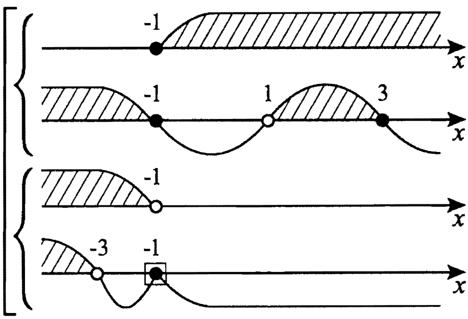
$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ 2 \cdot 2(x+2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < -2; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

5. $\dfrac{4}{|x+1|-2} \geqslant x-1.$

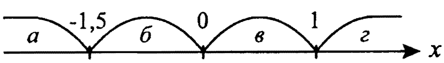
$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+1 \geqslant 0,\\ \dfrac{4}{x+1-2} \geqslant x-1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+1<0,\\ \dfrac{4}{-x-1-2} \geqslant x-1;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant -1,\\ \dfrac{4-(x-1)^2}{x-1} \geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<-1,\\ -\dfrac{4+(x-1)(x+3)}{x+3} \geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant -1,\\ \dfrac{(2+x-1)(2-x+1)}{x-1} \geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<-1,\\ \dfrac{-x^2-2x-1}{x+3} \geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant -1,\\ \dfrac{(x+1)(3-x)}{x-1} \geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<-1,\\ \dfrac{-(x+1)^2}{x+3} \geqslant 0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;-3) \cup \{-1\} \cup (1;3]$.

6. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4.$



а) $\left\{\begin{array}{l}x<-1{,}5, \quad \left(\begin{array}{ll}2x+3<0 & |2x+3|=-2x-3\\ x<0 & |x|=-x\\ x-1<0 & |x-1|=1-x\end{array}\right)\\ 1-x+x-2x-3>2x+4;\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}x<-1{,}5,\\ x<-1{,}5;\end{array}\right. \qquad (-\infty;-1{,}5):$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x < 0, & \begin{pmatrix} x < 0 & |x| = -x \\ 2x+3 \geqslant 0 & |2x+3| = 2x+3 \\ x-1 < 0 & |x-1| = 1-x \end{pmatrix} \\ x \geqslant -1{,}5, & \\ 1 - x + x + 2x + 3 > 2x + 4; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant -1{,}5, \\ 4 > 4; \end{cases} \text{ нет решений;}$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} x < 1, & \begin{pmatrix} x-1 < 0 & |x-1| = 1-x \\ x \geqslant 0 & |x| = x \\ 2x+3 > 0 & |2x+3| = 2x+3 \end{pmatrix} \\ x \geqslant 0, & \\ 1 - x - x + 2x + 3 > 2x + 4; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \text{ нет решений;}$$

$$\text{г)}\ \begin{cases} x \geqslant 1, & \begin{pmatrix} x-1 \geqslant 0 & |x-1| = x-1 \\ x > 0 & |x| = x \\ 2x+3 > 0 & |2x+3| = 2x+3 \end{pmatrix} \\ x - 1 - x + 2x + 3 > 2x + 4; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2 > 4; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

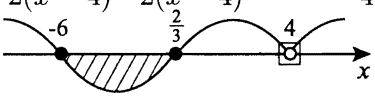
Ответ: $(-\infty; -1{,}5)$.

Решение тренировочной карточки 3

1. $\left(\dfrac{x+1}{4-x}\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. $\left(\dfrac{x+1}{4-x}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{x+1}{4-x}+\dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0;$

$$\frac{2x+2-4+x}{2(4-x)}\cdot\frac{2x+2+4-x}{2(4-x)} \leqslant 0;$$

$$\frac{3x-2}{2(x-4)}\cdot\frac{x+6}{2(x-4)} \leqslant 0;\quad \frac{(3x-2)(x+6)}{4(x-4)^2} \leqslant 0.$$



Ответ: $\left[-6; \dfrac{2}{3}\right]$.

2. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)} - \dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{6-x}{x-4} \geqslant \dfrac{5(6-x)}{x-2}$.

$$\frac{1}{3(x-4)}\left(10(5-x)-11(6-x)\right) \geqslant \frac{5(6-x)}{x-2};$$

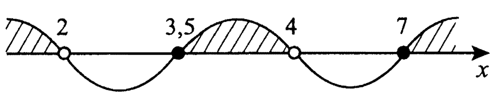
$$\frac{50-10x-66+11x}{3(x-4)} - \frac{5(6-x)}{x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{(x-16)(x-2)-3(x-4)(30-5x)}{3(x-4)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{x^2-18x+32+15x^2-150x+360}{3(x-4)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{8(2x^2-21x+49)}{3(x-4)(x-2)} \geqslant 0. \quad 2x^2-21x+49=(2x-7)(x-7).$$

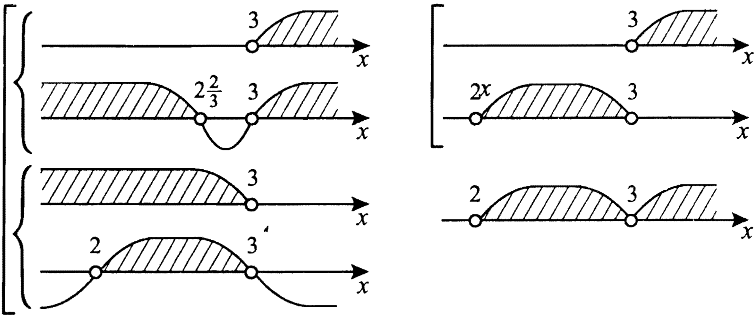
$$\frac{(2x-7)(x-7)}{(x-4)(x-2)} \geqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;2)\cup[3{,}5;4)\cup[7;+\infty)$.

3. $\dfrac{2x-5}{|x-3|} > -1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3, \\ \dfrac{2x-5}{x-3} > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{5-2x}{x-3} > -1; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3, \\ \dfrac{2x-5+x-3}{x-3} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{5-2x+x-3}{x-3} > 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3, \\ \dfrac{3x-8}{x-3} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ \dfrac{2-x}{x-3} > 0. \end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $(2; 3) \cup (3; +\infty)$.

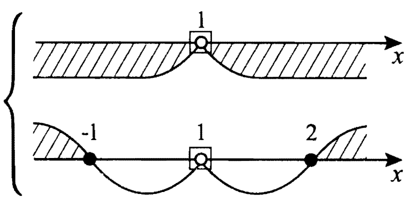
4. $\left|\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}\right| \leqslant 1.$

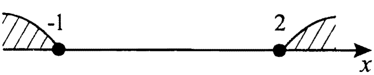
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-2x+1} \leqslant 1, \\ \dfrac{x-3}{x^2-2x+1} \geqslant -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x-3-x^2+2x-1}{(x-1)^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{x-3+x^2-2x+1}{(x-1)^2} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2+3x-4}{(x-1)^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2} \geqslant 0. \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x, т.к. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} \geqslant 0. \end{cases}$$



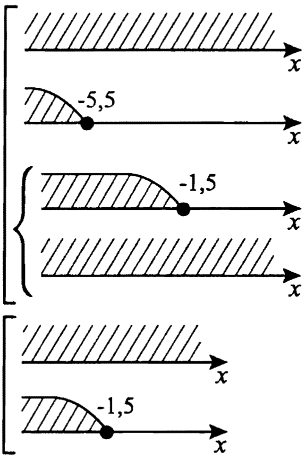


Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

5. $||x+6|-4| \geqslant x+1.$

$$\left[\begin{array}{l} |x+6|-4 \geqslant x+1 \\ |x+6|-4 \leqslant -x-1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x+6| \geqslant x+5 \\ |x+6| \leqslant 3-x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+6 \geqslant x+5 \\ x+6 \leqslant -x-5, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+6 \leqslant 3-x, \\ x+6 \geqslant x-3; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 6 \geqslant 5, \\ x \leqslant -5{,}5, \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant -1{,}5, \\ 6 \geqslant -3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$



$(-\infty; +\infty).$

Другой способ:

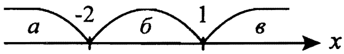
$$||x+6|-4| \geqslant x+1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+1 \geqslant 0, \\ (||x+6|-4|)^2 \geqslant (x+1)^2 \end{array}\right. \\ x < -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1, \quad (|x+6| = x+6) \\ (x+6-4+x+1)(x+6-4-x-1) \geqslant 0 \end{array}\right. \\ x < -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ 2x+3 \geqslant 0 \end{array}\right. \\ x < -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{array}\right. \\ x < -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant -1 \\ x < -1. \end{array}\right.$$

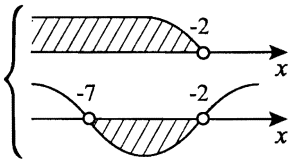
Ответ: $(-\infty;\, +\infty)$.

6. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.



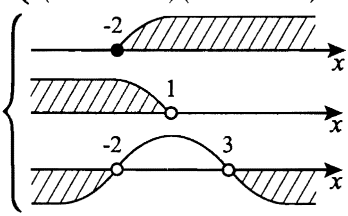
а) $\begin{cases} x<-2, & \begin{pmatrix} |x+2|=-x-2 \\ |x-1|=1-x \end{pmatrix} \\ (1-x-3)(-x-2-5)<0; \end{cases}$

$\begin{cases} x<-2, \\ (x+2)(x+7)<0. \end{cases}$



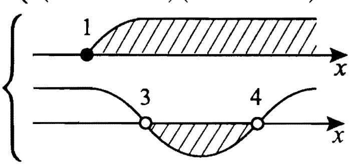
$(-7;-2)$;

б) $\begin{cases} x\geqslant-2, & \begin{pmatrix} |x+2|=x+2 \\ |x-1|=1-x \end{pmatrix} \\ x<1, \\ (1-x-3)(x+2-5)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant-2, \\ x<1, \\ -(x+2)(x-3)<0; \end{cases}$



нет решений;

в) $\begin{cases} x\geqslant 1, & \begin{pmatrix} |x-1|=x-1 \\ |x+2|=x+2 \end{pmatrix} \\ (x-1-3)(x+2-5)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ (x-4)(x-3)<0; \end{cases}$



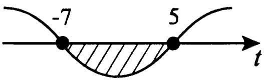
$(3;4)$.

Ответ: $(-7;-2)\cup(3;4)$.

Решение тренировочной карточки 4

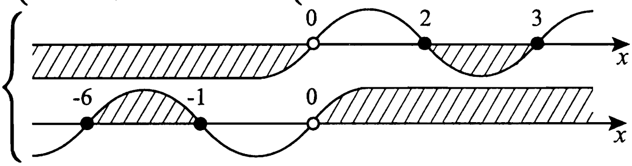
1. $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

Пусть $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)=t;\ \ t^2+2t-35\leqslant 0;$



$$\begin{cases} t\leqslant 5,\\ t\geqslant -7. \end{cases}\qquad \begin{cases} x+\dfrac{6}{x}\leqslant 5,\\ x+\dfrac{6}{x}\geqslant -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x}\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2+7x+6}{x}\geqslant 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x}\leqslant 0,\\ \dfrac{(x+6)(x+1)}{x}\geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[-6;-1]\cup[2;3]$.

2. $\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-20}-\dfrac{x-4}{2x^2+11x+5}\right):\dfrac{3}{2x+1}\leqslant\dfrac{3}{x-4}.$

$2x^2+11x+5=(2x+1)(x+5);\ \ x^2+x-20=(x+5)(x-4);$

$$\left(\frac{2x+1}{(x+5)(x-4)}-\frac{x-4}{(2x+1)(x+5)}\right)\cdot\frac{2x+1}{3}-\frac{3}{x-4}\leqslant 0;$$

$$\frac{(2x+1)^2-(x-4)^2}{(x+5)(x-4)(2x+1)}\cdot\frac{2x+1}{3}-\frac{3}{x-4}\leqslant 0;$$

$$\frac{(2x+1+x-4)(2x+1-x+4)}{(x+5)(x-4)(2x+1)}\cdot\frac{2x+1}{3}-\frac{3}{x-4}\leqslant 0;$$

$$\frac{3(x-1)(x+5)(2x+1)}{(x+5)(x-4)(2x+1)3}-\frac{3}{x-4}\leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-4}-\dfrac{3}{x-4}\leqslant 0,\\ x\neq -0{,}5,\\ x\neq -5; \end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-4}\leqslant 0,\\ x\neq -0{,}5,\\ x\neq -5; \end{cases}\qquad \begin{cases} 1\leqslant 0,\\ x\neq -0{,}5,\\ x\neq -5,\\ x\neq 4; \end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

3. $x^2 - 8x - \dfrac{3}{|x-4|} + 18 \leqslant 0.$

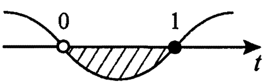
$(x-4)^2 - \dfrac{3}{|x-4|} + 2 \leqslant 0.$ Пусть $|x-4| = t$; $t^2 - \dfrac{3}{t} + 2 \leqslant 0$;

$\dfrac{t^3 + 2t - 3}{t} \leqslant 0$; $\dfrac{(t-1)(t^2+t+3)}{t} \leqslant 0$, так как

$$\begin{array}{l|l}
t^3 + 2t - 3 & t - 1 \\
\underline{t^3 - t^2} & \overline{t^2 + t + 3} \\
\quad t^2 + 2t - 3 & \\
\quad \underline{t^2 - t} & \\
\qquad 3t - 3 & \\
\qquad \underline{3t - 3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$t^2 + t + 3 > 0$ при всех t, т.к. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -11 < 0; \end{cases}$

$\dfrac{(t-1)(t^2+t+3)}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{t-1}{t} \leqslant 0.$



$\begin{cases} |x-4| \leqslant 1, \\ |x-4| > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4 \leqslant 1, \\ x - 4 \geqslant -1, \\ x \neq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$

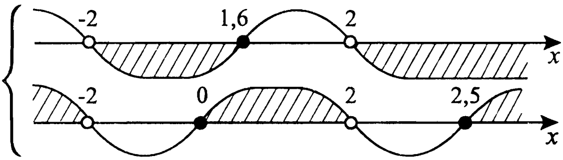
Ответ: $[3; 4) \cup (4; 5]$.

4. $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leqslant 1.$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \leqslant 1, \\ \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \geqslant -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 4}{x^2 - 4} \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - 5x + 4 + x^2 - 4}{x^2 - 4} \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{8-5x}{(x+2)(x-2)} \leqslant 0, \\ \dfrac{x(2x-5)}{(x+2)(x-2)} \geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $[0; 1{,}6] \cup [2{,}5; +\infty)$.

5. $||x+5|-2x| > x+3$.

$$\left[\begin{array}{l} |x+5|-2x > x+3 \\ |x+5|-2x < -x-3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x+5| > 3x+3 \\ |x+5| < x-3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+5 > 3x+3 \\ x+5 < -3x-3, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x+5 < x-3, \\ x+5 > 3-x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x < -2, \\ \begin{cases} 5 < -3, \\ x > -1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$(-\infty; 1)$.

Другой способ:

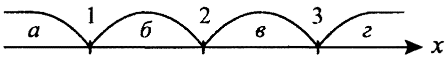
$$||x+5|-2x| > x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geqslant 0 \quad |x+5| = x+5 \\ (|x+5|-2x)^2 > (x+3)^2 \end{cases} \\ x < -3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ (x+5-2x+x+3)(x+5-2x-x-3) > 0 \end{cases} \\ x < -3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ 8\cdot(2-2x) > 0 \end{cases} \\ x < -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < 1 \end{cases} \\ x < -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -3 \leqslant x < 1 \\ x < -3. \end{array}\right. \quad (-\infty; 1).$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

6. $|x-1|-|x-2|+|x-3| \geqslant x+5$.



а) $\begin{cases} x<1, & \begin{pmatrix} |x-1|=1-x, \\ |x-2|=2-x, \\ |x-3|=3-x; \end{pmatrix} \\ 1-x-(2-x)+(3-x) \geqslant x+5; \end{cases}$

$\begin{cases} x<1, \\ x \leqslant -1{,}5; \end{cases}$ $(-\infty; -1{,}5]$;

б) $\begin{cases} x \geqslant 1, & \begin{pmatrix} |x-1|=x-1 \\ |x-2|=2-x \\ |x-3|=3-x \end{pmatrix} \\ x<2, & \\ x-1-(2-x)+(3-x) \geqslant x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x<2, \\ 0 \geqslant 5; \end{cases}$

нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant 2, & \begin{pmatrix} |x-2|=x-2 \\ |x-3|=3-x \\ |x-1|=x-1 \end{pmatrix} \\ x<3, & \\ x-1-(x-2)+(3-x) \geqslant x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x<3, \\ x \leqslant -0{,}5; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x \geqslant 3, & \begin{pmatrix} |x-3|=x-3 \\ |x-2|=x-2 \\ |x-1|=x-1 \end{pmatrix} \\ x-1-x+2+x-3 \geqslant x+5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ -2 \geqslant 5; \end{cases}$

нет решений.

Ответ: $(-\infty; -1{,}5]$.

Решение тренировочной карточки 5

1. $\dfrac{3-x}{(x+2)(x-1)} \leqslant \dfrac{2(3-x)}{2x^2-x-1}$.

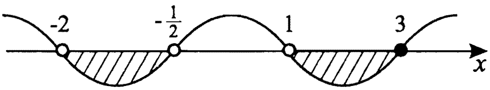
$(3-x)\left(\dfrac{1}{(x+2)(x-1)} - \dfrac{2}{2x^2-x-1}\right) \leqslant 0.$

$2x^2-x-1 = (2x+1)(x-1).$

$(3-x)\left(\dfrac{1}{(x+2)(x-1)} - \dfrac{2}{(2x+1)(x-1)}\right) \leqslant 0;$

$\dfrac{(3-x)\,(2x+1-2(x+2))}{(x+2)(x-1)(2x+1)} \leqslant 0;$

$\dfrac{(3-x)(-3)}{(x+2)(x-1)(2x+1)} \leqslant 0.$



Ответ: $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 3]$.

2. $\dfrac{x-3}{x^2+10x+21} + \dfrac{20}{3x^2+12x-63} \geqslant \dfrac{x-7}{9-x^2}$.

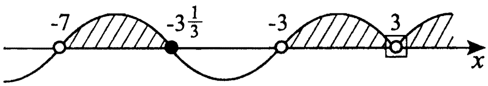
$\dfrac{x-3}{(x+3)(x+7)} + \dfrac{20}{3(x+7)(x-3)} + \dfrac{x-7}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0;$

$\dfrac{3(x-3)^2+20(x+3)+3(x+7)(x-7)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geqslant 0;$

$\dfrac{3x^2-18x+27+20x+60+3x^2-147}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geqslant 0;$

$\dfrac{2(3x^2+x-30)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geqslant 0; \quad \dfrac{2(3x+10)(x-3)}{3(x+3)(x-3)(x+7)} \geqslant 0.$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{6} = \dfrac{-1 \pm 19}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$

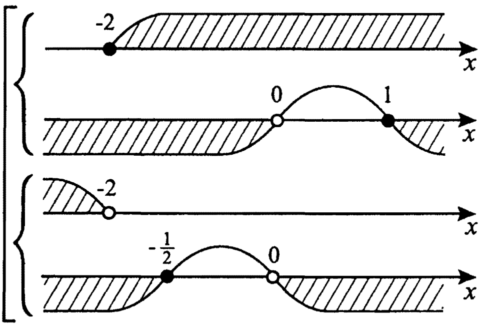


Ответ: $\left(-7; -3\dfrac{1}{3}\right] \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. $\dfrac{|x+2|-x}{x} \leqslant 2.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \dfrac{x+2-x}{x} \leqslant 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 < 0, \\ \dfrac{-x-2-x}{x} \leqslant 2; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant -2, \\ \dfrac{2-2x}{x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{-2x-2-2x}{x} \leqslant 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant -2, \\ \dfrac{2(1-x)}{x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{-2(2x+1)}{x} \leqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

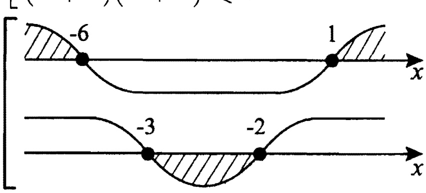


Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

4. $|x^2+5x| \geqslant 6.$

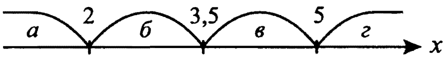
$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x \geqslant 6 \\ x^2+5x \leqslant -6; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x+6)(x-1) \geqslant 0 \\ (x+2)(x+3) \leqslant 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-3; -2] \cup [1; +\infty)$.

5. $2|5-x| < |2-x| + |2x-7|$.



а) $\begin{cases} x < 2, & \left(\begin{matrix} |2-x| = 2-x \\ |5-x| = 5-x \\ |2x-7| = 7-2x \end{matrix}\right) \\ 2(5-x) < (2-x) + 7 - 2x; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x < 2, \\ x < -1; \end{cases}$ $(-\infty; -1)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant 2, & \left(\begin{matrix} |2-x| = x-2 \\ |2x-7| = 7-2x \\ |5-x| = 5-x \end{matrix}\right) \\ x < 3{,}5, & \\ 2(5-x) < x - 2 + 7 - 2x; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 3{,}5, \\ x > 5; \end{cases}$

нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant 3{,}5, & \left(\begin{matrix} |2x-7| = 2x-7 \\ |2-x| = x-2 \\ |5-x| = 5-x \end{matrix}\right) \\ x < 5, & \\ 2(5-x) < x - 2 + 2x - 7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant 3{,}5, \\ x < 5, \\ x > 3\frac{4}{5}; \end{cases}$ $(3{,}8;\ 5)$;

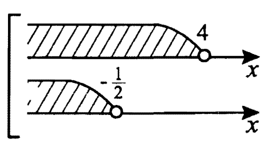
г) $\begin{cases} x \geqslant 5, & \left(\begin{matrix} |5-x| = x-5 \\ |2-x| = x-2 \\ |2x-7| = 2x-7 \end{matrix}\right) \\ 2(x-5) < x - 2 + 2x - 7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x > -1; \end{cases}$ $[5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (3{,}8; +\infty)$.

6. $||x+5| - 2x| > x - 3$.

$\left[\begin{array}{l} |x+5| - 2x > x - 3 \\ |x+5| - 2x < -x + 3; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} |x+5| > 3x - 3 \\ |x+5| < x + 3; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x + 5 > 3x - 3 \\ x + 5 < -3x + 3, \\ \begin{cases} 5 < 3, \\ x > -4; \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x < 4 \\ x < -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$



Другой способ:

$$||x+5|-2x| > x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \quad (|x+5| = x+5), \\ (|x+5|-2x)^2 > (x-3)^2 \end{cases} \\ x < 3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x+5-2x+x-3)(x+5-2x-x+3) > 0 \end{cases} \\ x < 3; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3, \\ 2\cdot(-2x+8) > 0 \end{cases} \\ x < 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < 4 \end{cases} \\ x < 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3 \leqslant x < 4 \\ x < 3; \end{array}\right. \quad (-\infty; 4).$$

Ответ: $(-\infty; 4)$.

Решение тренировочной карточки 6

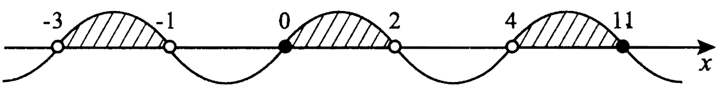
1. $\dfrac{2}{x^2-3x-4} \geqslant \dfrac{3}{x^2+x-6}.$

$$\frac{2}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{(x+3)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{2(x^2+x-6)-3(x^2-3x-4)}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{2x^2+2x-12-3x^2+9x+12}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0;$$

$$\frac{-x(x-11)}{(x-4)(x+1)(x+3)(x-2)} \geqslant 0.$$



Ответ: $(-3;-1)\cup[0;2)\cup(4;11]$.

2. $\dfrac{x+4}{x^2-3x-10} + \dfrac{x}{x^2+3x-4} \geqslant \dfrac{2x+0{,}8}{x^2-x-20}.$

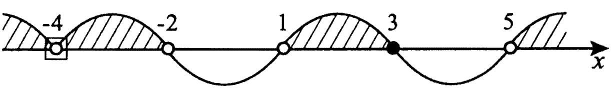
$$\frac{x+4}{(x-5)(x+2)} + \frac{x}{(x+4)(x-1)} - \frac{2x+0{,}8}{(x-5)(x+4)} \geqslant 0;$$

$$\frac{(x+4)^2(x-1)+x(x-5)(x+2)-(2x+0{,}8)(x+2)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geqslant 0;$$

$$\frac{x^3+8x^2+16x-x^2-8x-16+x^3-3x^2-10x-2x^3-2{,}8x^2+3{,}2x+1{,}6}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geqslant 0;$$

$$\frac{1{,}2x^2+1{,}2x-14{,}4}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geqslant 0;$$

$$\frac{1{,}2(x+4)(x-3)}{(x-5)(x+2)(x+4)(x-1)} \geqslant 0.$$



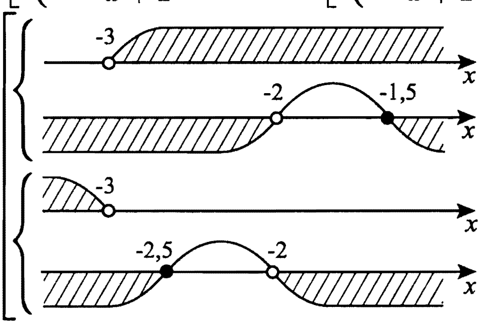
Ответ: $(-\infty;-4)\cup(-4;-2)\cup(1;3]\cup(5;+\infty)$.

3. $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6} \leqslant 2.$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3);$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -3, \\ \dfrac{1}{x+2} \leqslant 2, \\ x \neq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{-1}{x+2} \leqslant 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3, \\ \dfrac{1-2x-4}{x+2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{-1-2x-4}{x+2} \leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -3, \\ \dfrac{-(2x+3)}{x+2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{-(2x+5)}{x+2} \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup [-1{,}5;+\infty)$.

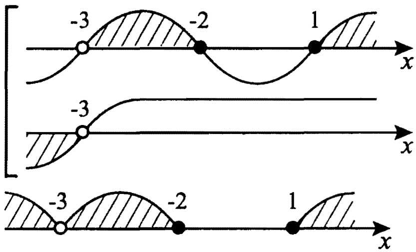
4. $\left|\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}\right| \geqslant 1.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+2x+1}{x+3} \geqslant 1 \\ \dfrac{x^2+2x+1}{x+3} \leqslant -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+2x+1-x-3}{x+3} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+2x+1+x+3}{x+3} \leqslant 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x-2}{x+3} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+3x+4}{x+3} \leqslant 0; \end{array}\right.$$

$x^2 + 3x + 4 > 0$ при всех x, т.к. $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+3} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+3} \leqslant 0. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [1; +\infty)$.

5. $||x+5| - x + 2| \leqslant 1$.

$$\begin{cases} |x+5| - x + 2 \leqslant 1, \\ |x+5| - x + 2 \geqslant -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} |x+5| \leqslant x - 1, \\ |x+5| \geqslant x - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5 \leqslant x - 1, \\ x + 5 \geqslant 1 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x + 5 \geqslant x - 3 \\ x + 5 \leqslant 3 - x; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 \leqslant -1, \\ x \geqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} 5 \geqslant -3 \\ x \leqslant -1; \end{array}\right. \end{cases}$$ нет решений.

Другой способ:

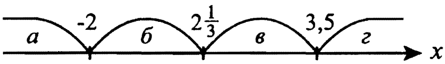
$$||x+5| - x + 2| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 5 \geqslant 0, \\ |x + 5 - x + 2| \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 5 < 0, \\ |-x - 5 - x + 2| \leqslant 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -5, \\ 7 \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5, \\ |2x + 3| \leqslant 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{cases} x < -5, \\ 2x + 3 \leqslant 1, \\ 2x + 3 \geqslant -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -5, \\ x \leqslant -1, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$$ нет решений.

Ответ: нет решений.

6. $2|7-2x| < |7-3x| + |x+2|$.



а) $$\begin{cases} x < -2, \\ 2(7-2x) < 7-3x-x-2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x+2| = -x-2 \\ |7-2x| = 7-2x \\ |7-3x| = 7-3x \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x < -2, \\ 14 < 5; \end{cases}$$

нет решений;

б) $$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 2\frac{1}{3}, \\ 2(7-2x) < 7-3x+x+2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x+2| = x+2 \\ |7-3x| = 7-3x \\ |7-2x| = 7-2x \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 2\frac{1}{3}, \\ x > 2{,}5; \end{cases}$$

нет решений;

в) $$\begin{cases} x \geqslant 2\frac{1}{3}, \\ x < 3{,}5, \\ 2(7-2x) < 3x-7+x+2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |7-3x| = 3x-7 \\ |7-2x| = 7-2x \\ |x+2| = x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2\frac{1}{3}, \\ x < 3{,}5, \\ x > 2\frac{3}{8}; \end{cases} \quad \left(2\frac{3}{8}; 3{,}5\right);$$

г) $$\begin{cases} x \geqslant 3{,}5, \\ 2(2x-7) < 3x-7+x+2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |7-2x| = 2x-7 \\ |7-3x| = 3x-7 \\ |x+2| = x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3{,}5, \\ -14 < -5; \end{cases} \quad [3{,}5; +\infty).$$

Ответ: $\left(2\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

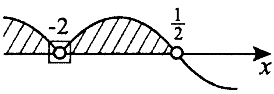
Решение тренировочной карточки 7

1. $\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^2 > 1.$

$$\left(\frac{3-x}{2+x}-1\right)\left(\frac{3-x}{2+x}+1\right) > 0;$$

$$\frac{3-x-x-2}{x+2}\cdot\frac{3-x+x+2}{x+2} > 0;$$

$$\frac{1-2x}{x+2}\cdot\frac{5}{x+2} > 0.$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; \dfrac{1}{2}\right)$.

2. $\dfrac{6x+7}{2x+3} \geqslant \dfrac{2x+8}{3x+7}\cdot\left(\dfrac{x+4}{2x^2+x-3}-\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}\right).$

$2x^2+x-3=(2x+3)(x-1);$

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1).$

$$\frac{6x+7}{2x+3} \geqslant \frac{2(x+4)}{3x+7}\cdot\left(\frac{x+4}{(2x+3)(x-1)}-\frac{2x+3}{(x+4)(x-1)}\right);$$

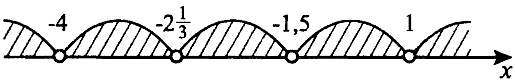
$$\frac{2(x+4)}{3x+7}\cdot\left(\frac{(x+4)^2-(2x+3)^2}{(x+4)(x-1)(2x+3)}\right)-\frac{6x+7}{2x+3} \leqslant 0;$$

$$\frac{2(x+4)(x+4+2x+3)(x+4-2x-3)}{(3x+7)(x+4)(x-1)(2x+3)}-\frac{6x+7}{2x+3} \leqslant 0;$$

$$\frac{2(x+4)}{3x+7}\cdot\frac{(3x+7)(1-x)}{(x+4)(x-1)(2x+3)}-\frac{6x+7}{2x+3} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{-2}{(2x+3)}-\dfrac{6x+7}{2x+3} \leqslant 0, \\ x \neq -2\dfrac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-3(2x+3)}{2x+3} \leqslant 0, \\ x \neq -2\dfrac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leqslant 0, \\ x \neq -2\dfrac{1}{3}, \\ x \neq 1, \\ x \neq -4, \\ x \neq -1{,}5. \end{cases}$$

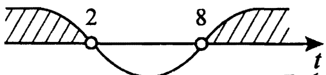


Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-4; -2\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-2\dfrac{1}{3}; -1{,}5\right) \cup$

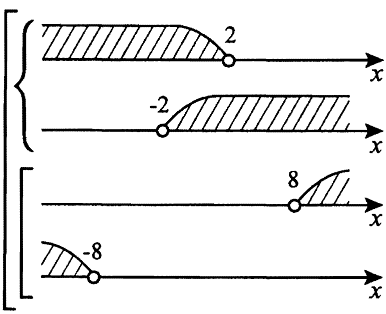
$\cup(-1{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$.

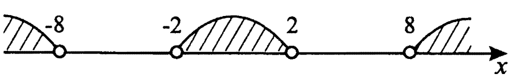
3. $(|x| - 8)(|x| - 2) > 0$.

Пусть $|x| = t$ $(t - 8)(t - 2) > 0$.



$$\left[\begin{array}{l} t < 2 \\ t > 8. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x| < 2 \\ |x| > 8; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 2, \\ x > -2 \end{cases} \\ x > 8, \\ x < -8. \end{array}\right.$$





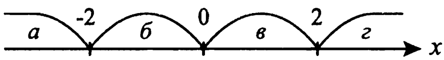
Ответ: $(-\infty; -8) \cup (-2; 2) \cup (8; +\infty)$.

4. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \geqslant 1.$

Так как $|x+2| \geqslant 0$, $x^2+|x+2| > 0$ при всех x;

$|x^2-2x|+4 \geqslant x^2+|x+2|;$

$y = x^2 - 2x$



а) $x < -2;$

$$\begin{cases} x^2-2x > 0, \\ x+2 < 0, \\ x^2-2x+4 \geqslant x^2-x-2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x^2-2x| = x^2-2x \\ |x+2| = -x-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ x \leqslant 6; \end{cases} \quad (-\infty; -2);$$

б) $-2 \leqslant x < 0;$

$$\begin{cases} x^2-2x > 0, \\ x+2 \geqslant 0, \\ x^2-2x+4 \geqslant x^2+x+2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x^2-2x| = x^2-2x \\ |x+2| = x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 0, \\ x \leqslant \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad [-2; 0);$$

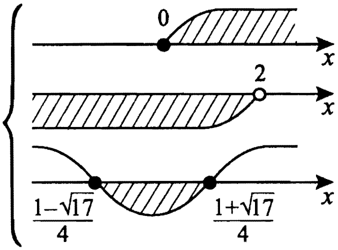
в) $0 \leqslant x < 2;$

$$\begin{cases} x^2-2x \leqslant 0, \\ x+2 > 0, \\ -x^2+2x+4 \geqslant x^2+x+2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x^2-2x| = -x^2+2x \\ |x+2| = x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 2, \\ 2x^2-x-2 \leqslant 0; \end{cases}$$

$2x^2 - x - 2 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4};$$



$\left[0;\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$;

г) $x \geqslant 2$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 0, \\ x + 2 > 0, \\ x^2 - 2x + 4 \geqslant x^2 + x + 2; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} |x^2 - 2x| = x^2 - 2x \\ |x+2| = x + 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant \dfrac{2}{3}; \end{cases}$$

нет решений.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

5. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right| < 1.$

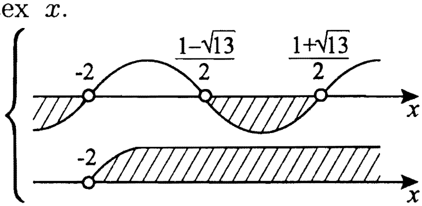
$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+2} < 1, \\ \dfrac{x^2-1}{x+2} > -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-1-x-2}{x+2} < 0, \\ \dfrac{x^2-1+x+2}{x+2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-3}{x+2} < 0, \\ \dfrac{x^2+x+1}{x+2} > 0. \end{cases}$$

$x^2 - x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$;

$x^2 + x + 1 > 0$ при всех x.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-3}{x+2} < 0, \\ \dfrac{1}{x+2} > 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. $||x^2 - 3x + 2| - 1| > x - 2.$

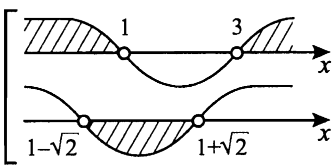
$$\left[\begin{array}{l} |x^2 - 3x + 2| - 1 > x - 2 \\ |x^2 - 3x + 2| - 1 < -x + 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} |x^2 - 3x + 2| > x - 1 \\ |x^2 - 3x + 2| < 3 - x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 > x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 < 1 - x, \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 3 - x, \\ x^2 - 3x + 2 > x - 3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 < 0, \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x^2 - 4x + 5 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-3) > 0 \\ (x-1)^2 < 0, \\ x^2 - 2x - 1 < 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)(x-3) > 0 \\ x \neq 1, \\ x^2 - 2x - 1 < 0. \end{array}\right.$$

$x^2 - 2x - 1 = 0; \;\; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$



Ответ: $(-\infty; 1 + \sqrt{2}) \cup (3; +\infty).$

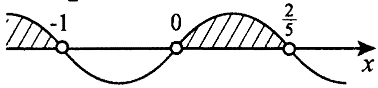
Решение тренировочной карточки 8

1. $\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} > \dfrac{5}{x}$.

$\dfrac{2 - 3x - 5x^2}{x^3} > 0$. $\quad 5x^2 + 3x - 2 = (5x-2)(x+1)$;

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \dfrac{-3 \pm 7}{10}$; $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$

$\dfrac{-(5x-2)(x+1)}{x^3} > 0$.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(0; \dfrac{2}{5}\right)$.

2. $\dfrac{17{,}5x}{2+5x-3x^2} \geqslant \dfrac{x+2}{3x+1} + \dfrac{3x-1}{2-x}$.

$2 + 5x - 3x^2 = -(3x+1)(x-2)$;

$3x^2 - 5x - 2 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6}$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$\dfrac{x+2}{3x+1} - \dfrac{3x-1}{x-2} + \dfrac{17{,}5x}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$;

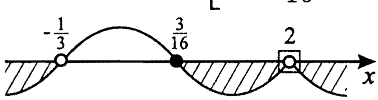
$\dfrac{(x+2)(x-2) - (3x-1)(3x+1) + 17{,}5x}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$;

$\dfrac{x^2 - 4 - 9x^2 + 1 + 17{,}5x}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$; $\quad \dfrac{-8x^2 + 17{,}5x - 3}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$;

$\dfrac{-(16x^2 - 35x + 6)}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$. $\quad 16x^2 - 35x + 6 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{35 \pm \sqrt{1225 - 4 \cdot 6 \cdot 16}}{32} = \dfrac{35 \pm 29}{32}$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{3}{16}. \end{array}\right.$

$\dfrac{-(16x-3)(x-2)}{(3x+1)(x-2)} \leqslant 0$.

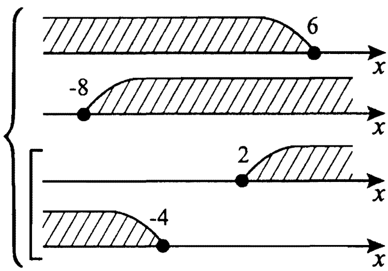


Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[\dfrac{3}{16}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

3. $||x+1|-5| \leqslant 2.$

$$\begin{cases} |x+1|-5 \leqslant 2, \\ |x+1|-5 \geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+1| \leqslant 7, \\ |x+1| \geqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 \leqslant 7, \\ x+1 \geqslant -7, \\ \left[\begin{array}{l} x+1 \geqslant 3 \\ x+1 \leqslant -3 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 6, \\ x \geqslant -8, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

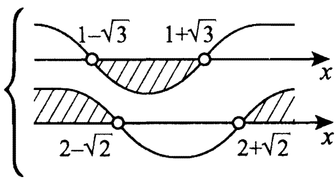


Ответ: $[-8;-4] \cup [2;6]$.

4. $|x^2-3x|+x-2<0.$

$|x^2-3x|<2-x;$

$$\begin{cases} x^2-3x<2-x, \\ x^2-3x>x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x-2<0, \\ x^2-4x+2>0. \end{cases}$$



$(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{2})$

Другой способ:

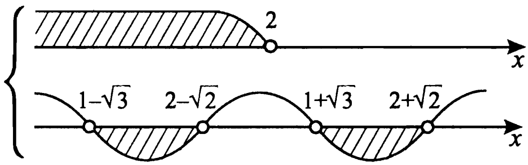
$|x^2-3x|+x-2<0 \Leftrightarrow |x^2-3x|<2-x;$

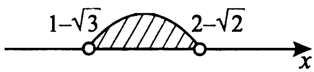
$$\begin{cases} 2-x>0, \\ (|x^2-3x|)^2<(2-x)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2, \\ (x^2-3x+2-x)(x^2-3x-2+x)<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2, \\ (x^2-4x+2)(x^2-2x-2)<0. \end{cases}$$

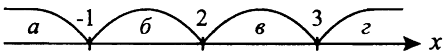
$$x^2 - 4x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2};$$
$$x^2 - 2x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$





Ответ: $(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{2})$.

5. $|x+1| + |x-2| - |x-3| > 4$.



а) $\begin{cases} x < -1, & \left(\begin{array}{l} |x+1| = -x-1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{array}\right) \\ -x-1-x+2-(3-x) > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1, \\ x < -6; \end{cases}$ $(-\infty; -6);$

б) $\begin{cases} x \geqslant -1, & \left(\begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x-2| = 2-x \\ |x-3| = 3-x \end{array}\right) \\ x < 2, & \\ x+1+2-x-(3-x) > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 2, \\ x > 4; \end{cases}$

нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant 2, & \left(\begin{array}{l} |x-2| = x-2 \\ |x-3| = 3-x \\ |x+1| = x+1 \end{array}\right) \\ x < 3, & \\ x+1+x-2-(3-x) > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 3, \\ x > 2\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\left(2\dfrac{2}{3}; 3\right);$

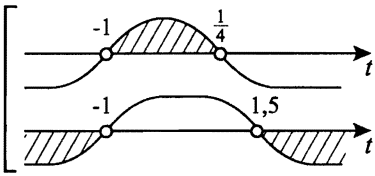
г) $\begin{cases} x \geqslant 3, & \left(\begin{array}{l} |x-3| = x-3 \\ |x-2| = x-2 \\ |x+1| = x+1 \end{array}\right) \\ x+1+x-2-x+3 > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > 2; \end{cases}$ $[3; +\infty).$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup \left(2\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

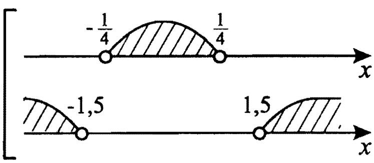
6. $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+|x|}\right| > 1.$

Пусть $|x| = t$; $\left|\dfrac{2-3t}{1+t}\right| > 1.$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-3t}{1+t} > 1 \\ \dfrac{2-3t}{1+t} < -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2-3t-t-1}{1+t} > 0 \\ \dfrac{2-3t+t+1}{1+t} < 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{1-4t}{1+t} > 0 \\ \dfrac{3-2t}{1+t} < 0; \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} -1 < |x| < \dfrac{1}{4} \\ |x| < -1, \\ |x| > 1{,}5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x| < \dfrac{1}{4} \\ |x| > 1{,}5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{1}{4}, \\ x > -\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ x > 1{,}5, \\ x < -1{,}5. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -1{,}5) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right) \cup (1{,}5; +\infty).$

Решение зачетных карточек заданий

Решение зачетной карточки 1

1. $\left(\dfrac{4x^2+5x-1}{2x^2+5x+3}\right)^2 > 1.$

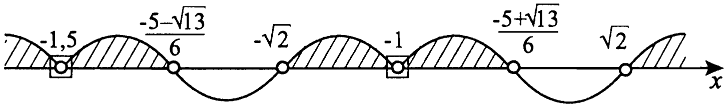
$$\left(\frac{4x^2+5x-1}{2x^2+5x+3}-1\right)\left(\frac{4x^2+5x-1}{2x^2+5x+3}+1\right)>0;$$

$$\frac{4x^2+5x-1-2x^2-5x-3}{2x^2+5x+3}\cdot\frac{4x^2+5x-1+2x^2+5x+3}{2x^2+5x+3}>0;$$

$$\frac{2(x^2-2)}{2x^2+5x+3}\cdot\frac{2(3x^2+5x+1)}{2x^2+5x+3}>0.$$

$$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3);\quad x_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=-1{,}5\\ x=-1;\end{array}\right.$$

$$3x^2+5x+1=0;\qquad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}.$$



Ответ: $(-\infty;-1{,}5)\cup\left(-1{,}5;-\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\cup(-\sqrt{2};-1)\cup$

$\cup\left(-1;\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}\right)\cup(\sqrt{2};+\infty).$

2. $\frac{1}{x+2}+\frac{ax+6-2a-3x}{x-a-1}\left(\frac{a+3}{ax^2-3x^2-4a+12}-\frac{x+2}{a^2x-9x-2a^2+18}\right)\leqslant 0.$

$$ax^2-3x^2-4a+12=(a-3)x^2-4(a-3)=$$
$$=(a-3)(x-2)(x+2);$$
$$a^2x-9x-2a^2+18=a^2(x-2)-9(x-2)=(x-2)(a+3)(a-3);$$
$$ax+6-2a-3x=a(x-2)-3(x-2)=(a-3)(x-2).$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{(a-3)(x-2)}{x-a-1}\left(\frac{(a+3)^2-(x+2)^2}{(a+3)(a-3)(x+2)(x-2)}\right)\leqslant 0;$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{(a-3)(x-2)}{x-a-1}\cdot\frac{(a+x+5)(a-x+1)}{(a+3)(a-3)(x+2)(x-2)}\leqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{a+x+5}{(a+3)(x+2)} \leqslant 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a+3-a-x-5}{(a+3)(x+2)} \leqslant 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a+3} \leqslant 0, \\ a \neq 3, \\ x \neq a+1, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Ответ: при $a > -3$, $a \neq 3$ решением является любое число, кроме 2; -2; $a+1$; при $a \leqslant -3$; $a = 3$ решений нет.

3. $\dfrac{x^2 - |x| - 6}{x-2} \geqslant 2x.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \quad (|x| = x) \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x-2} \geqslant 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \quad (|x| = -x) \\ \dfrac{x^2 + x - 6}{x-2} \geqslant 2x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 6 - 2x(x-2)}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x + 3 \geqslant 2x, \\ x \neq 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-2} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2 - 3x + 6 > 0$ при всех x, т. к. $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = -15 < 0. \end{cases}$

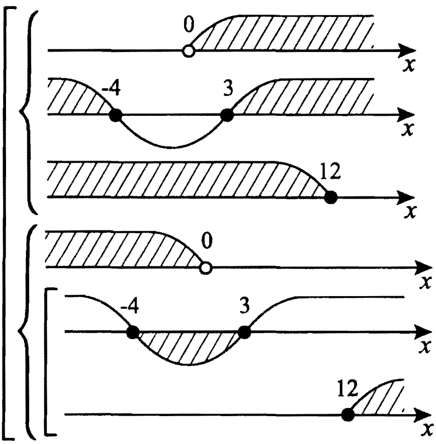
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-2} \leqslant 0 \end{cases} \\ x < 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 2 \\ x < 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

4. $\dfrac{|24-2x-x^2|}{x} \leqslant x.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ |24-2x-x^2| \leqslant x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ |24-2x-x^2| \geqslant x^2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ 24-2x-x^2 \leqslant x^2,\\ 24-2x-x^2 \geqslant -x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}24-2x-x^2 \geqslant x^2\\ 24-2x-x^2 \leqslant -x^2;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x^2+x-12 \geqslant 0,\\ x \leqslant 12\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x^2+x-12 \leqslant 0\\ x \geqslant 12;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ (x+4)(x-3) \geqslant 0,\\ x \leqslant 12\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}(x+4)(x-3) \leqslant 0\\ x \geqslant 12.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

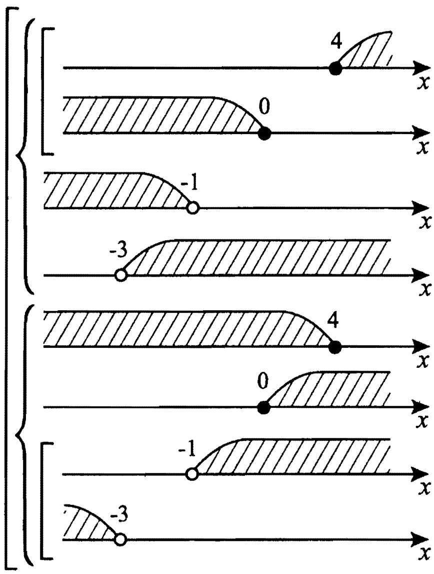


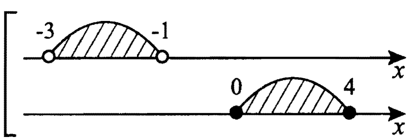
Ответ: $[-4;0) \cup [3;12]$.

5. $\dfrac{2-|x-2|}{1-|x+2|} \leqslant 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-|x-2| \leqslant 0,\\ 1-|x+2| > 0\end{cases}\\ \begin{cases}2-|x-2| \geqslant 0,\\ 1-|x+2| < 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-2| \geqslant 2,\\ |x+2| < 1\end{cases}\\ \begin{cases}|x-2| \leqslant 2,\\ |x+2| > 1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2\geqslant 2\\ x-2\leqslant -2,\end{array}\right.\\ x+2<1,\\ x+2>-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-2\leqslant 2,\\ x-2\geqslant -2,\\ \left[\begin{array}{l}x+2>1\\ x+2<-1;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geqslant 4\\ x\leqslant 0,\end{array}\right.\\ x<-1,\\ x>-3\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 4,\\ x\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}x>-1\\ x<-3.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$





Ответ: $(-3;-1)\cup[0;4]$.

6. $|x^4-8x^3+17x^2+2x-24|\leqslant|x^3-4x^2+x+6|$.

Пусть

$f(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24;$

$f(-1)=0.$

$$\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 \\ x^4 + x^3 \end{array}} & \dfrac{x+1}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} \\
\underline{-\begin{array}{l} -9x^3 + 17x^2 + 2x - 24 \\ -9x^3 - 9x^2 \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{l} 26x^2 + 2x - 24 \\ 26x^2 + 26x \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{l} -24x - 24 \\ -24x - 24 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}$$

$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24;\ \ \varphi(2) = 0.$

$$\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ x^3 - 2x^2 \end{array}} & \dfrac{x-2}{x^2 - 7x + 12} \\
\underline{-\begin{array}{l} -7x^2 + 26x - 24 \\ -7x^2 + 14x \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{l} 12x - 24 \\ 12x - 24 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}$$

$f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)(x-4).$

Пусть $g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6;\ \ g(-1) = 0.$

$$\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^3 - 4x^2 + x + 6 \\ x^3 + x^2 \end{array}} & \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \\
\underline{-\begin{array}{l} -5x^2 + x + 6 \\ -5x^2 - 5x \end{array}} & \\
\underline{-\begin{array}{l} 6x + 6 \\ 6x + 6 \end{array}} & \\
0 &
\end{array}$$

$g(x) = (x+1)(x-2)(x-3);$

$|(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leqslant |(x+1)(x-2)(x-3)|;$

$|(x+1)(x-2)(x-3)|(|x-4| - 1) \leqslant 0;$

$$\left[\begin{array}{l} |(x+1)(x-2)(x-3)| = 0 \\ |x-4| \leqslant 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (x+1)(x-2)(x-3) = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x - 4 \leqslant 1, \\ x - 4 \geqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2, \\ x = 3, \\ \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 3. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $[3; 5] \cup \{-1; 2\}$.

Решение зачетной карточки 2

1. $\dfrac{35x}{4+10x-6x^2} \geqslant \dfrac{x+2}{3x+1} - \dfrac{3x-1}{x-2}.$

$4+10x-6x^2 = -2(3x+1)(x-2); \quad 3x^2-5x-2=0;$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 7}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

$\dfrac{-35x}{2(3x+1)(x-2)} - \dfrac{x+2}{3x+1} + \dfrac{3x-1}{x-2} \geqslant 0;$

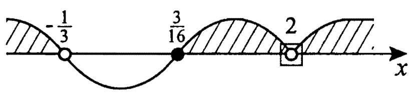
$\dfrac{-35x-2(x+2)(x-2)+2(3x-1)(3x+1)}{2(3x+1)(x-2)} \geqslant 0;$

$\dfrac{18x^2-2-2x^2+8-35x}{2(3x+1)(x-2)} \geqslant 0; \quad \dfrac{16x^2-35x+6}{2(3x+1)(x-2)} \geqslant 0;$

$16x^2-35x+6=0;$

$x_{1,2} = \dfrac{35 \pm \sqrt{1225-384}}{32} = \dfrac{35 \pm \sqrt{841}}{32} = \dfrac{35 \pm 29}{32}.$

$\dfrac{(16x-3)(x-2)}{2(3x+1)(x-2)} \geqslant 0.$



Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left[\dfrac{3}{16}; 2\right) \cup (2; +\infty).$

2. $\frac{2ax-2x^2}{2a-3x} + \frac{a+2x}{3a+5x} : \left(\frac{2a+x}{3a^2-ax-10x^2} - \frac{2a}{6a^2+7ax-5x^2} - \frac{x}{2a^2-5ax+2x^2}\right) > 0.$

$3a^2-ax-10x^2 = (3a+5x)(a-2x);$

$a_{1,2} = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2+120x^2}}{6} = \dfrac{x \pm 11x}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} a = 2x \\ a = -\dfrac{5}{3}x; \end{array}\right.$

$6a^2+7ax-5x^2 = (2a-x)(3a+5x);$

$a_{1,2} = \dfrac{-7x \pm \sqrt{49x^2+120x^2}}{12} = \dfrac{-7x \pm 13x}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{x}{2} \\ a = -\dfrac{5}{3}x; \end{array}\right.$

$2a^2-5ax+2x^2 = (2a-x)(a-2x);$

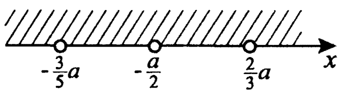
$a_{1,2} = \dfrac{5x \pm \sqrt{25x^2-16x^2}}{4} = \dfrac{5x \pm 3x}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} a = 2x \\ a = \dfrac{x}{2}. \end{array}\right.$

$$\frac{2ax-2x^2}{2a-3x}+\frac{a+2x}{3a+5x}:\frac{(2a+x)(2a-x)-2a(a-2x)-x(3a+5x)}{(3a+5x)(2a-x)(a-2x)}>0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{2ax-2x^2}{2a-3x}+\dfrac{(2a-x)(a-2x)}{2a-3x}>0,\\ 3a+5x\neq 0,\\ a+2x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2ax-2x^2+2a^2-5ax+2x^2}{2a-3x}>0,\\ 3a+5x\neq 0,\\ a+2x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{a(2a-3x)}{2a-3x}>0,\\ x\neq -\dfrac{3}{5}a,\\ x\neq -\dfrac{a}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}a>0,\\ x\neq \dfrac{2}{3}a,\\ x\neq -\dfrac{3}{5}a,\\ x\neq -\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

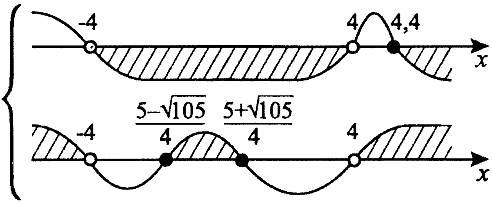


Ответ: при $a>0$ решением является любое число, кроме $\frac{2}{3}a$; $-\frac{3}{5}a$; $-\frac{a}{2}$; при $a\leqslant 0$ решений нет.

3. $$\left|\frac{x^2-5x+6}{x^2-16}\right|\leqslant 1.$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\geqslant -1;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6-x^2+16}{x^2-16}\leqslant 0,\\ \dfrac{x^2-5x+6+x^2-16}{x^2-16}\geqslant 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{22-5x}{(x+4)(x-4)}\leqslant 0,\\ \dfrac{2x^2-5x-10}{(x+4)(x-4)}\geqslant 0.\end{cases}$$



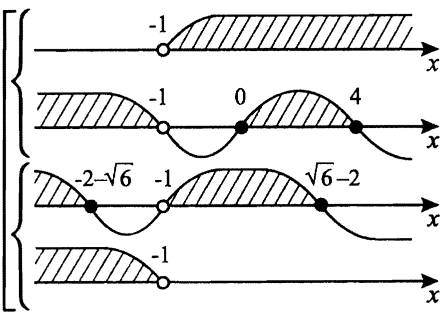
Ответ: $\left[\dfrac{5-\sqrt{105}}{4}; \dfrac{5+\sqrt{105}}{4}\right) \cup [4{,}4; +\infty)$.

4. $\dfrac{4x-1}{|x+1|} \geqslant x-1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -1, \\ \dfrac{4x-1}{x+1} \geqslant x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ \dfrac{1-4x}{x+1} \geqslant x-1; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -1, \\ \dfrac{4x-1-x^2+1}{x+1} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ \dfrac{1-4x-x^2+1}{x+1} \geqslant 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -1, \\ \dfrac{x(4-x)}{x+1} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ \dfrac{-(x^2+4x-2)}{x+1} \geqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

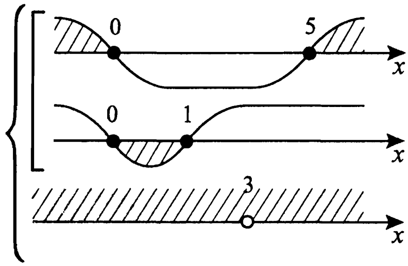
$x^2+4x-2=0$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$.



Ответ: $(-\infty; -2-\sqrt{6}] \cup [0; 4]$.

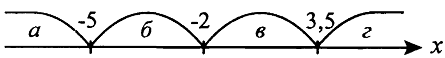
5. $|x| \geqslant \dfrac{2x}{|x-3|}$.

$\begin{cases} |x-3|\cdot|x| \geqslant 2x, \\ x \neq 3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-3x \geqslant 2x \\ x^2-3x \leqslant -2x, \end{array}\right. \\ x \neq 3. \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

6. $|5+x| < |x+2| + |2x-7|$.



а) $\begin{cases} x < -5, \\ -x-5 < -x-2-2x+7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x < -5, \\ x < 5; \end{cases}$ $\quad (-\infty; -5)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant -5, \\ x < -2, \\ x+5 < -x-2-2x+7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -5, \\ x < -2, \\ x < 0; \end{cases}$ $\quad [-5; -2)$;

в) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 3{,}5, \\ x+5 < x+2-2x+7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 3{,}5, \\ x < 2; \end{cases}$ $\quad [-2; 2)$;

г) $\begin{cases} x \geqslant 3{,}5, \\ x+5 < x+2+2x-7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geqslant 3{,}5, \\ x > 5; \end{cases}$ $\quad (5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\dfrac{(x-4)^2}{x^2-6x+9} > \dfrac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}.$

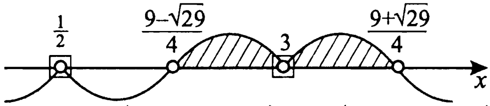
$$\left(\frac{4-x}{x-3}\right)^2 - \left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^2 > 0;$$

$$\left(\frac{4-x}{x-3} + \frac{2x-3}{2x-1}\right)\left(\frac{-x+4}{x-3} - \frac{2x-3}{2x-1}\right) > 0;$$

$$\frac{(4-x)(2x-1)+(2x-3)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} \cdot \frac{(4-x)(2x-1)-(2x-3)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} > 0;$$

$$\frac{(2x^2-9x+4-2x^2+9x-9)(2x^2-9x+4+2x^2-9x+9)}{(x-3)^2(2x-1)^2} > 0.$$

$$\frac{-5(4x^2-18x+13)}{(x-3)^2(2x-1)^2} > 0; \quad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-52}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{4}.$$



Ответ: $\left(\dfrac{9-\sqrt{29}}{4}; 3\right) \cup \left(3; \dfrac{9+\sqrt{29}}{4}\right).$

2. $\dfrac{11}{4x^2+14x-8} - \dfrac{4-3x}{3x^2-8x-3} \geqslant \dfrac{2x+1}{2x^2+2x-24}.$

$4x^2+14x-8 = 2(2x-1)(x+4);$

$2x^2+7x-4=0;$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$3x^2-8x-3 = (3x+1)(x-3);$

$3x^2-8x-3=0;$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$$

$2x^2+2x-24 = 2(x^2+x-12) = 2(x+4)(x-3).$

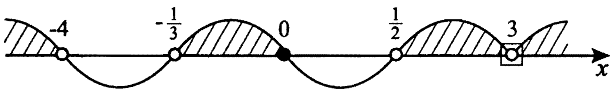
$$\frac{11}{2(2x-1)(x+4)} - \frac{4-3x}{(3x+1)(x-3)} - \frac{2x+1}{2(x+4)(x-3)} \geqslant 0;$$

$$\frac{11(3x+1)(x-3)-2(4-3x)(x+4)(2x-1)-(2x+1)(2x-1)(3x+1)}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geqslant 0;$$

$$\frac{33x^2-88x-33+12x^3+26x^2-80x+32-12x^3-4x^2+3x+1}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geqslant 0;$$

$$\frac{55x^2-165x}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geqslant 0;$$

$$\frac{55x(x-3)}{2(2x-1)(x+4)(3x+1)(x-3)} \geqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

3. $||x+6|-4| < x+1$.

$$\begin{cases} |x+6|-4 < x+1, \\ |x+6|-4 > -x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x+6| < x+5, \\ |x+6| > 3-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6 < x+5, \\ x+6 > -x-5, \\ \left[\begin{array}{l} x+6 > 3-x \\ x+6 < x-3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} 6 < 5, \\ x > -5{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x > -1{,}5 \\ 6 < -3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Другой способ:

$||x+6|-4| < x+1 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -6, \\ |x+6-4| < x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6, \\ |-x-6-4| < x+1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -6, \\ |x+2| < x+1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6, \\ |x+10| < x+1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \geqslant -6, \\ x+1 > 0, \\ (|x+2|)^2 < (x+1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -1, \\ (x+2+x+1)(x+2-x-1) < 0; \end{cases}$$

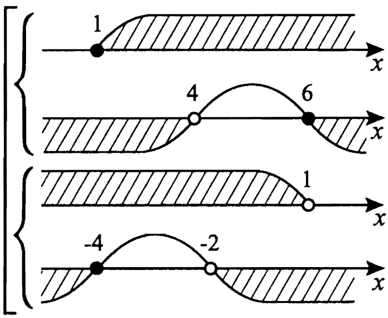
$$\begin{cases} x > -1, \\ (2x+3) \cdot 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x < -1{,}5; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

4. $\dfrac{1}{|x-1|-3} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1,\\ \dfrac{1}{x-1-3} \leqslant \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x < 1,\\ \dfrac{1}{1-x-3} \leqslant \dfrac{1}{2};\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1,\\ \dfrac{2-x+4}{2(x-4)} \leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x < 1,\\ \dfrac{-2-x-2}{2(x+2)} \leqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1,\\ \dfrac{6-x}{2(x-4)} \leqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x < 1,\\ \dfrac{-(x+4)}{2(x+2)} \leqslant 0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$



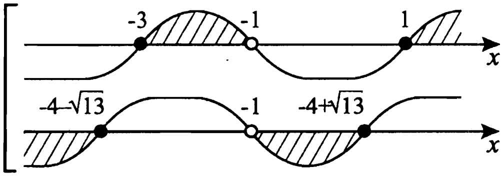
Ответ: $(-\infty; -4] \cup (-2; 4) \cup [6; +\infty)$.

5. $\left|\dfrac{x^2+5x}{x+1}\right| \geqslant 3.$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+5x}{x+1} \geqslant 3\\ \dfrac{x^2+5x}{x+1} \leqslant -3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+5x-3x-3}{x+1} \geqslant 0\\ \dfrac{x^2+5x+3x+3}{x+1} \leqslant 0;\end{array}\right.$$

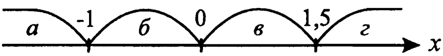
$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+2x-3}{x+1} \geqslant 0\\ \dfrac{x^2+8x+3}{x+1} \leqslant 0.\end{array}\right.$$

$x^2+8x+3=0;\quad x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{13}.$



Ответ: $(-\infty;-4-\sqrt{13}]\cup[-3;-1)\cup(-1;-4+\sqrt{13}]\cup[1;+\infty)$.

6. $|x+1|-|x|+|2x-3|>2x+4$.



а) $\begin{cases} x<-1, \\ -x-1+x+3-2x>2x+4; \end{cases}$

$\begin{cases} x<-1, \\ x<-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $(-\infty;-1)$;

б) $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x<0, \\ x+1+x+3-2x>2x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x<0, \\ x<0; \end{cases}$ $[-1;0)$;

в) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<1{,}5, \\ x+1-x+3-2x>2x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ x<1{,}5, \\ x<0; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x\geqslant 1{,}5, \\ x+1-x-3+2x>2x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 1{,}5, \\ -2>4; \end{cases}$

нет решений.

Ответ: $(-\infty;0)$.

Решение зачетной карточки 4

1. $\dfrac{(x+4)^2}{x^2+6x+9} > \dfrac{4x^2-12x+9}{(2x-1)^2}$.

$$\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 - \left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^2 > 0;$$

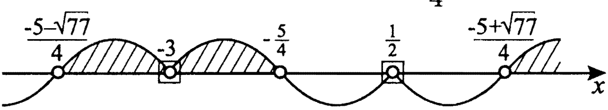
$$\left(\frac{x+4}{x+3} + \frac{2x-3}{2x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{x+3} - \frac{2x-3}{2x-1}\right) > 0;$$

$$\frac{(x+4)(2x-1)+(2x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \cdot \frac{(x+4)(2x-1)-(2x-3)(x+3)}{(x+3)(2x-1)} > 0;$$

$$\frac{(2x^2+7x-4+2x^2+3x-9)(2x^2+7x-4-2x^2-3x+9)}{(x+3)^2(2x-1)^2} > 0;$$

$$\frac{(4x^2+10x-13)(4x+5)}{(x+3)^2(2x-1)^2} > 0.$$

$$4x^2+10x-13=0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{77}}{4}.$$



Ответ: $\left(\dfrac{-5-\sqrt{77}}{4}; -3\right) \cup \left(-3; -\dfrac{5}{4}\right) \cup \left(\dfrac{-5+\sqrt{77}}{4}; +\infty\right)$.

2. $\left(\frac{2c+3x}{2x^2-cx-3c^2} - \frac{5c}{6x^2-13cx+6c^2} + \frac{5x}{2c^2-cx-3x^2}\right) \frac{x+c}{x-9c} \geqslant \frac{0,2}{2c-3x}$.

$2x^2-cx-3c^2 = (2x-3c)(x+c)$. $\quad 2x^2-cx-3c^2=0;$

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2+24c^2}}{4} = \frac{c \pm 5c}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-c \\ x=\dfrac{3}{2}c; \end{array}\right.$$

$6x^2-13cx+6c^2 = (3x-2c)(2x-3c);$

$6x^2-13cx+6c^2=0;$

$$x_{1,2} = \frac{13c \pm \sqrt{169c^2-144c^2}}{12} = \frac{13c \pm 5c}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}c \\ x=\dfrac{2}{3}c; \end{array}\right.$$

$2c^2-cx-3x^2 = (2c-3x)(c+x);$

$$c_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2+24x^2}}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} c=-x \\ c=\dfrac{3}{2}x; \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{2c+3x}{(2x-3c)(x+c)}-\frac{5c}{(3x-2c)(2x-3c)}+\frac{5x}{(2c-3x)(c+x)}\right)\frac{x+c}{x-9c}\geqslant\frac{0{,}2}{2c-3x};$$

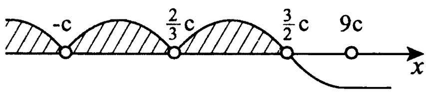
$$\frac{(2c+3x)(3x-2c)-5c(x+c)-5x(2x-3c)}{(2x-3c)(3x-2c)(x+c)}\cdot\frac{x+c}{x-9c}-\frac{0{,}2}{2c-3x}\geqslant 0;$$

$$\frac{-x^2+10cx-9c^2}{(2x-3c)(3x-2c)(x+c)}\cdot\frac{x+c}{x-9c}-\frac{0{,}2}{2c-3x}\geqslant 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{c-x+0{,}2(2x-3c)}{(3x-2c)(2x-3c)}\geqslant 0,\\ x\neq -c,\\ x\neq 9c;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{0{,}2(2c-3x)}{(3x-2c)(2x-3c)}\geqslant 0,\\ x\neq -c,\\ x\neq 9c;\end{cases}$$

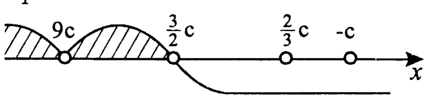
$$\begin{cases}\dfrac{-0{,}2}{2x-3c}\geqslant 0,\\ x\neq -c,\\ x\neq 9c,\\ x\neq \dfrac{2}{3}c;\end{cases}\qquad \begin{cases}x<\dfrac{3}{2}c,\\ x\neq -c,\\ x\neq 9c,\\ x\neq \dfrac{2}{3}c.\end{cases}$$

а) При $c>0$



$$(-\infty;-c)\cup\left(-c;\frac{2}{3}c\right)\cup\left(\frac{2}{3}c;\frac{3}{2}c\right);$$

б) при $c<0$



$$(-\infty;9c)\cup\left(9c;\frac{3}{2}c\right).$$

Ответ: при $c>0$ $x\in(-\infty;-c)\cup\left(-c;\dfrac{2}{3}c\right)\cup\left(\dfrac{2}{3}c;\dfrac{3}{2}c\right)$;

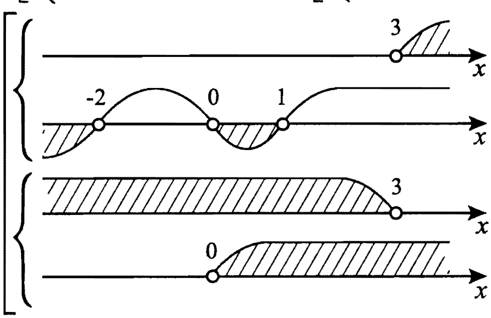
при $c<0$ $x\in(-\infty;9c)\cup\left(9c;\dfrac{3}{2}c\right)$;

при $c=0$ $x<0$.

3. $\dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|} < \dfrac{2}{x}.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3,\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}<\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases} x<3,\\ \dfrac{x^2-2x-3}{3-x}<\dfrac{2}{x};\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3,\\ x+1<\dfrac{2}{x}\end{cases}\\ \begin{cases} x<3,\\ -x-1<\dfrac{2}{x};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3,\\ \dfrac{x^2+x-2}{x}<0\end{cases}\\ \begin{cases} x<3,\\ \dfrac{x^2+x+2}{x}>0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3,\\ \dfrac{(x+2)(x-1)}{x}<0\end{cases}\\ \begin{cases} x<3,\\ \dfrac{1}{x}>0.\end{cases}\end{array}\right.$$



Ответ: $(0;3)$.

4. $||x+7|-2x| < x+1.$

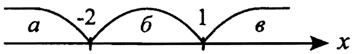
$$\begin{cases} |x+7|-2x<x+1,\\ |x+7|-2x>-x-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+7|<3x+1,\\ |x+7|>x-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7<3x+1,\\ x+7>-3x-1,\\ \left[\begin{array}{l} x+7>x-1\\ x+7<1-x;\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases} x>3,\\ x>-2,\\ \left[\begin{array}{l} 7>-1\\ x<-3.\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: $(3;+\infty)$.

5. $|x+2|+|x-1|<3x$.



а) $\begin{cases} x<-2, \\ -x-2+1-x<3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x<-2, \\ x>-\dfrac{1}{5}; \end{cases}$ нет решений;

б) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x<1, \\ x+2+1-x<3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x<1, \\ x>1; \end{cases}$ нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x+2+x-1<3x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x>1; \end{cases}$ $(1;+\infty)$.

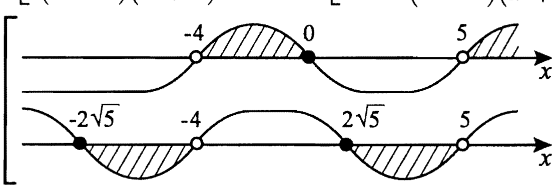
Ответ: $(1;+\infty)$.

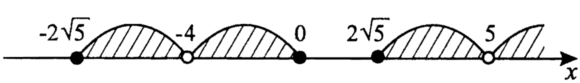
6. $\left|\dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-20}\right| \geqslant 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \geqslant 1 \\ \dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-20} \leqslant -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x-20-x^2+x+20}{x^2-x-20} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+x-20+x^2-x-20}{x^2-x-20} \leqslant 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{(x-5)(x+4)} \geqslant 0 \\ \dfrac{2(x^2-20)}{(x-5)(x+4)} \leqslant 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{(x-5)(x+4)} \geqslant 0 \\ \dfrac{2\left(x-2\sqrt{5}\right)\left(x+2\sqrt{5}\right)}{(x-5)(x+4)} \leqslant 0. \end{array}\right.$$





Ответ: $\left[-2\sqrt{5};-4\right) \cup (-4;0] \cup \left[2\sqrt{5};5\right) \cup (5;+\infty)$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\dfrac{6x^2-x-18}{3x^2-12}+\dfrac{5-2x}{2-x}\leqslant 5+\dfrac{1}{x-2}.$

$$\frac{6x^2-x-18-3(5-2x)(x+2)-5(3x^2-12)-3(x+2)}{3(x-2)(x+2)}\leqslant 0;$$

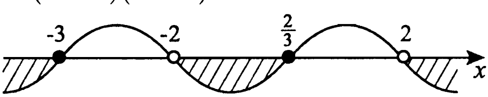
$$\frac{6x^2-x-18+6x^2-3x-30-15x^2+60-3x-6}{3(x-2)(x+2)}\leqslant 0;$$

$$\frac{-3x^2-7x+6}{3(x-2)(x+2)}\leqslant 0.$$

$-3x^2-7x+6=-(3x-2)(x+3);\ \ 3x^2+7x-6=0;$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{-7\pm 11}{6};\quad \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$$

$$\frac{-(3x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+2)}\leqslant 0.$$



Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left(-2;\dfrac{2}{3}\right]\cup(2;+\infty).$

2. $\left(\dfrac{a+5b}{6a^2+17ab-3b^2}-\dfrac{a+3b}{6a^2+29ab-5b^2}\right):\dfrac{a+4b}{a^2+8ab+15b^2}\leqslant\dfrac{24a}{6a-b}.$

$6a^2+17ab-3b^2=(6a-b)(a+3b);$

$$a_{1,2}=\frac{-17b\pm\sqrt{289b^2+72b^2}}{12}=\frac{-17b\pm 19b}{12};\quad \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{b}{6}\\ a=-3b;\end{array}\right.$$

$6a^2+29ab-5b^2=(6a-b)(a+5b);$

$$a_{1,2}=\frac{-29b\pm\sqrt{841b^2+120b^2}}{12}=\frac{-29b\pm 31b}{12};\quad \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{b}{6}\\ a=-5b;\end{array}\right.$$

$a^2+8ab+15b^2=(a+3b)(a+5b);$

$$a_{1,2}=-4b\pm\sqrt{16b^2-15b^2}=-4b\pm b;\quad \left[\begin{array}{l} a=-5b\\ a=-3b.\end{array}\right.$$

$$\left(\frac{a+5b}{(6a-b)(a+3b)}-\frac{a+3b}{(6a-b)(a+5b)}\right)\cdot\frac{(a+3b)(a+5b)}{a+4b}-\frac{24a}{6a-b}\leqslant 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{(a+5b+a+3b)(a+5b-a-3b)}{(6a-b)(a+4b)}-\dfrac{24a}{6a-b}\leqslant 0,\\ a\neq -3b,\\ a\neq -5b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2(a+4b)2b}{(6a-b)(a+4b)}-\dfrac{24a}{6a-b}\leqslant 0,\\ a\neq -3b,\\ a\neq -5b,\\ a\neq -4b;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{4b-24a}{6a-b}\leqslant 0,\\ a\neq -3b,\\ a\neq -5b,\\ a\neq -4b;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{4(b-6a)}{6a-b}\leqslant 0,\\ a\neq -3b,\\ a\neq -5b,\\ a\neq -4b;\end{cases}\quad \begin{cases}-4\leqslant 0,\\ a\neq -3b,\\ a\neq -5b,\\ a\neq -4b,\\ a\neq \dfrac{b}{6};\end{cases}\quad \begin{cases}a\neq -3b,\\ a\neq -4b,\\ a\neq -5b,\\ a\neq \dfrac{b}{6}.\end{cases}$$

Ответ: все значение a и b, кроме $a\neq -3b$; $a\neq -4b$; $a\neq -5b$; $a\neq \frac{b}{6}$.

3. $||x-6|-3|<x-1$.

$$\begin{cases}|x-6|-3<x-1,\\ |x-6|-3>1-x;\end{cases}\quad \begin{cases}|x-6|<x+2,\\ |x-6|>4-x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-6<x+2,\\ x-6>-x-2,\\ \left[\begin{array}{l}x-6>4-x\\ x-6<x-4;\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases}-6<2,\\ x>2,\\ \left[\begin{array}{l}x>5\\ -6<-4;\end{array}\right.\end{cases}\quad x>2.$$

Ответ: $(2;+\infty)$.

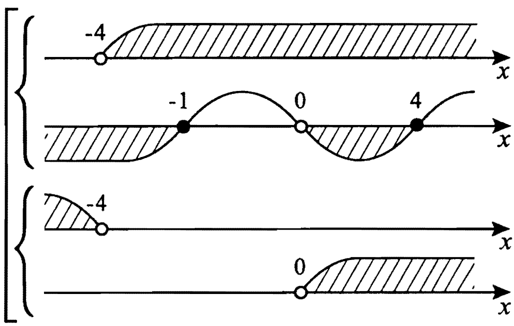
4. $\dfrac{x^2+x-12}{|x+4|}\leqslant\dfrac{4}{x}$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2+x-12}{x+4}\leqslant\dfrac{4}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x+4<0,\\ \dfrac{x^2+x-12}{-(x+4)}\leqslant\dfrac{4}{x};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -4, \\ x - 3 \leqslant \dfrac{4}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4, \\ 3 - x \leqslant \dfrac{4}{x}; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -4, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x} \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4, \\ \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x} \geqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

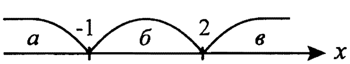
$x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -4, \\ \dfrac{(x-4)(x+1)}{x} \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -4, \\ \dfrac{1}{x} \geqslant 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

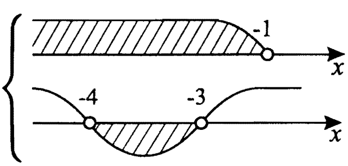


Ответ: $(-4; -1] \cup (0; 4]$.

5. $(|x+1| - 3)(|x-2| - 5) < 0$.



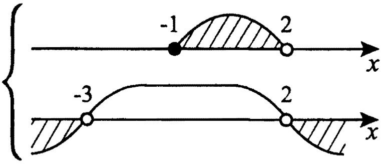
а) $\begin{cases} x < -1, \\ (-x - 1 - 3)(2 - x - 5) < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1, \\ (x+4)(x+3) < 0. \end{cases}$



$(-4; -3)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 2, \\ (x+1-3)(2-x-5) < 0; \end{cases}$

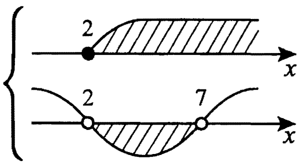
$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 2, \\ (x-2)(-(x+3)) < 0; \end{cases}$



нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x+1-3)(x-2-5) < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x-2)(x-7) < 0. \end{cases}$

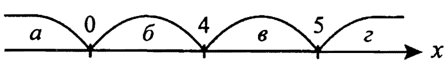


$(2; 7)$.

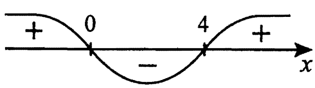
Ответ: $(-4; -3) \cup (2; 7)$.

6. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geqslant 1.$

$|x^2-4x|+3 \geqslant x^2+|x-5|$, так как $x^2+|x-5| > 0$ при всех x.



$y = x^2 - 4x$

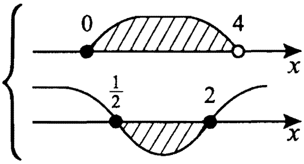


а) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2-4x+3 \geqslant x^2+5-x; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ 3x \leqslant -2; \end{cases}$

$\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$;

б) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 4, \\ 4x - x^2 + 3 \geqslant x^2 + 5 - x; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 4, \\ 2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 4, \\ 2(x-2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 0; \end{cases}$



$\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$;

в) $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x < 5, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant x^2 + 5 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x < 5, \\ 3x \leqslant -2; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant x^2 + x - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ 5x \leqslant 8; \end{cases}$

нет решений.

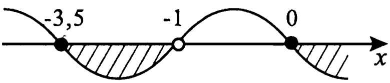
Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\dfrac{5}{(x+1)^3} - \dfrac{3}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$.

$$\frac{5-3(x+1)-2(x+1)^2}{(x+1)^3} \leqslant 0;$$

$$\frac{5-3x-3-2x^2-4x-2}{(x+1)^3} \leqslant 0; \qquad \frac{-x(2x+7)}{(x+1)^3} \leqslant 0.$$



Ответ: $[-3{,}5; -1) \cup [0; +\infty)$.

2. $\left(\dfrac{2+3x}{2x^2-x-3} - \dfrac{5}{6x^2-13x+6} + \dfrac{5x}{2-x-3x^2}\right) \dfrac{x+1}{x-9} \geqslant \dfrac{0{,}2}{2-3x}$.

$2x^2 - x - 3 = (2x-3)(x+1)$;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}; \quad \left[\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ x &= -1; \end{aligned}\right.$$

$6x^2 - 13x + 6 = (3x-2)(2x-3)$;

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12}; \quad \left[\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} \\ x &= \frac{2}{3}; \end{aligned}\right.$$

$2 - x - 3x^2 = -(3x-2)(x+1); \quad 3x^2 + x - 2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}; \quad \left[\begin{aligned} x &= -1 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

$$\left(\frac{2+3x}{(2x-3)(x+1)} - \frac{5}{(3x-2)(2x-3)} - \frac{5x}{(3x-2)(x+1)}\right) \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0{,}2}{3x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{(2+3x)(3x-2) - 5(x+1) - 5x(2x-3)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)} \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0{,}2}{3x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{(9x^2-4-5x-5-10x^2+15x)(x+1)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)(x-9)} + \frac{0{,}2}{3x-2} \geqslant 0;$$

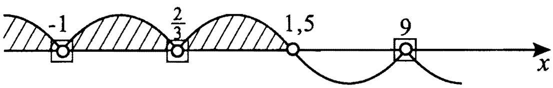
$$\frac{-x^2+10x-9}{(x+1)(2x-3)(3x-2)} \cdot \frac{x+1}{x-9} + \frac{0{,}2}{3x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{-(x-1)(x-9)(x+1)}{(x+1)(2x-3)(3x-2)(x-9)}+\frac{0{,}2}{3x-2}\geqslant 0;$$

$$\begin{cases}\dfrac{(1-x)}{(2x-3)(3x-2)}+\dfrac{0{,}2}{3x-2}\geqslant 0,\\ x\neq -1,\\ x\neq 9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1-x+0{,}2(2x-3)}{(2x-3)(3x-2)}\geqslant 0,\\ x\neq -1,\\ x\neq 9;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{-0{,}2(3x-2)}{(2x-3)(3x-2)}\geqslant 0,\\ x\neq -1,\\ x\neq 9;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{-0{,}2}{2x-3}\geqslant 0,\\ x\neq -1,\\ x\neq 9,\\ x\neq \dfrac{2}{3};\end{cases}\qquad \begin{cases}x<1{,}5,\\ x\neq -1,\\ x\neq 9,\\ x\neq \dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

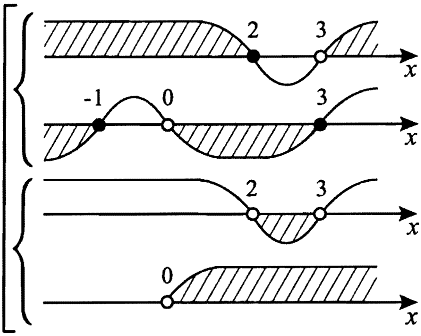


Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-1;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};1{,}5\right)$.

3. $\dfrac{|x^2-5x+6|}{x-3}\leqslant\dfrac{3}{x}$.

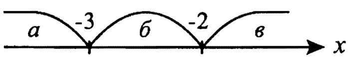
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}\leqslant\dfrac{3}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-5x+6<0,\\ \dfrac{-(x^2-5x+6)}{x-3}\leqslant\dfrac{3}{x};\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)(x-2)\geqslant 0,\\ x-2\leqslant\dfrac{3}{x},\\ x\neq 3\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x-2)<0,\\ 2-x\leqslant\dfrac{3}{x};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq 3,\\ (x-3)(x-2)\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x}\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x-2)<0,\\ \dfrac{x^2-2x+3}{x}\geqslant 0;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\neq 3,\\ (x-3)(x-2)\geqslant 0,\\ \dfrac{(x-3)(x+1)}{x}\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)(x-2)<0,\\ \dfrac{1}{x}\geqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.$$



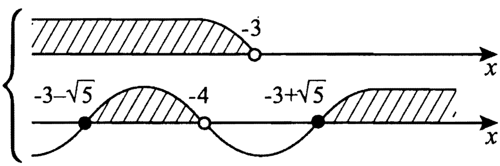
Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; 3)$.

4. $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$.



а) $\begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{4}{-x-3-1} \geqslant -x-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{-4+(x+2)(x+4)}{x+4} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -3, \\ \dfrac{x^2+6x+4}{x+4} \geqslant 0; \end{cases}$



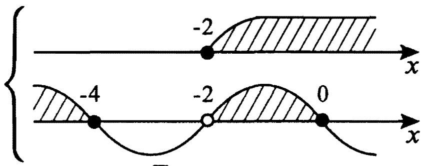
$[-3-\sqrt{5}; -4)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -2, \\ \dfrac{4}{x+3-1} \geqslant -x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -2, \\ \dfrac{4+(x+2)^2}{x+2} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -2, \\ x > -2; \end{cases}$ нет решений;

в) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ \dfrac{4}{x+3-1} \geqslant x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ \dfrac{4-(x+2)^2}{x+2} \geqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ \dfrac{-x(x+4)}{x+2} \geqslant 0. \end{cases}$



$(-2; 0]$.

Ответ: $[-3-\sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$.

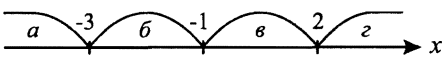
5. $|1 - |x+2|| < 3 - x$.

$\begin{cases} 1 - |x+2| < 3 - x, \\ 1 - |x+2| > x - 3; \end{cases}$ $\begin{cases} |x+2| > x - 2, \\ |x+2| < 4 - x; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2 > x-2 \\ x+2 < 2-x, \end{array}\right. \\ x+2 < 4-x, \\ x+2 > x-4; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 > -2 \\ x < 0, \end{array}\right. \\ x < 1, \\ 2 > -4. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

6. $|x+1| + |x-2| - |x+3| > 4$.



а) $\begin{cases} x < -3, \\ -x-1-x+2+x+3 > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -3, \\ x < 0; \end{cases}$ $(-\infty; -3)$;

б) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -1, \\ -x-1+2-x-x-3 > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -1, \\ x < -2; \end{cases}$ $[-3; -2)$;

в) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 2, \\ x+1+2-x-x-3 > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 2, \\ x < -4; \end{cases}$

нет решений;

г) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x+1+x-2-x-3 > 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x > 8; \end{cases}$ $(8; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (8; +\infty)$.

Решение зачетной карточки 7

1. $$A(x,c) = \frac{2c+3x+6}{2x^2+x(8-c)+8-2c-3c^2} -$$
$$-\frac{5c}{6x^2+x(24-13c)+24-26c+6c^2}+$$
$$+\frac{5(x+2)}{2c^2-x(c+12)-12-2c-3x^2}.$$
$$A(x,c)\cdot\frac{x+c+2}{x-9c+2}+\frac{0{,}2}{3x-2c+6}\leqslant 0.$$

а) $2x^2+x(8-c)+8-2c-3c^2 =$
$= 2(x^2+4x+4)-c(x+2)-3c^2 =$
$= 2(x+2)^2-c(x+2)-3c^2.$
Пусть $x+2=t$.
$2t^2-ct-3c^2=(2t-3c)(t+c)=(2x+4-3c)(x+2+c);$
$2t^2-ct-3c^2=0;$
$$t_{1,2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2+24c^2}}{4}=\frac{c\pm 5c}{4};\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}c \\ t=-c. \end{array}\right.$$

б) $6x^2+x(24-13c)+24-26c+6c^2=$
$=6(x^2+4x+4)-13c(x+2)+6c^2=$
$=6(x+2)^2-13c(x+2)+6c^2.$
Пусть $x+2=t$. Тогда $6t^2-13ct+6c^2=(3t-2c)(2t-3c)=$
$=(3(x+2)-2c)\cdot(2(x+2)-3c)=$
$=(3x+6-2c)(2x+4-3c).$
$$t_{1,2}=\frac{13c\pm 5c}{12};\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}c \\ t=\dfrac{2}{3}c. \end{array}\right.$$

в) $2c^2-x(c+12)-12-2c-3x^2=2c^2-c(x+2)-3(x+2)^2.$
Пусть $x+2=t$.
$2c^2-ct-3t^2=(2c-3t)(c+t)=(2c-3x-6)(c+x+2);$
$$c_{1,2}=\frac{t\pm 5t}{4};\quad \left[\begin{array}{l} c=\dfrac{3}{2}t \\ c=-t. \end{array}\right.$$

$$\frac{2c+3x+6}{(2x-3c+4)(x+c+2)}-\frac{5c}{(3x-2c+6)(2x-3c+4)}-$$

$$-\frac{5x+10}{(3x-2c+6)(x+c+2)}=$$

$$=\frac{(2c+3x+6)(3x-2c+6)-5c(x+c+2)-(5x+10)(2x-3c+4)}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)};$$

$$(2c+3x+6)(3x-2c+6)-5c(x+c+2)-(5x+10)(2x-3c+4)=$$

$$=6cx+9x^2+18x-4c^2-6cx-12c+12c+18x+36-5cx-$$

$$-5c^2-10c-10x^2+15cx-20x-20x+30c-40;$$

$$A(x,c)=\frac{-x^2+10cx-4x+20c-4-9c^2}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)}.$$

Значит, $A(x,c)\cdot\dfrac{x+c+2}{x-9c+2}+\dfrac{0{,}2}{3x-2c+6}\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-x^2+10cx-4x+20c-4-9c^2}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)}\cdot\frac{x+c+2}{x-9c+2}+\frac{0{,}2}{3x-2c+6}\leqslant 0;$$

$$-x^2+10cx-4x+20c-4-9c^2=-((x+2)^2-10c(x+2)+9c^2).$$

Пусть $x+2=t$.

$$t^2-10ct+9c^2=(t-9c)(t-c)=(x-9c+2)(x-c+2).$$

$$\frac{-(x-9c+2)(x-c+2)(x+c+2)}{(2x-3c+4)(x+c+2)(3x-2c+6)(x-9c+2)}+\frac{0{,}2}{3x-2c+6}\leqslant 0;$$

$$\frac{-x+c-2}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)}+\frac{0{,}2}{3x-2c+6}\leqslant 0;$$

$$\frac{-x+c-2+0{,}2(2x-3c+4)}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)}\leqslant 0;$$

$$\frac{-0{,}6x+0{,}4c-1{,}2}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)}\leqslant 0;$$

$$\frac{-0{,}2(3x-2c+6)}{(2x-3c+4)(3x-2c+6)}\leqslant 0;\quad \frac{-0{,}2}{2x-3c+4}\leqslant 0.$$

Ответ: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}(3c-4),\\ x\neq\dfrac{1}{3}(2c-6),\\ x\neq -c-2,\\ x\neq 9c-2.\end{cases}$

2. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) \leqslant 4x^2.$

$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24) \leqslant 4x^2; \quad (:x^2)$

($x=0$ не является решением)

$$\frac{x^2+14x+24}{x} \cdot \frac{x^2+11x+24}{x} \leqslant 4;$$

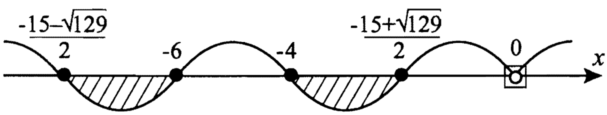
$$\left(x+14+\frac{24}{x}\right)\left(x+11+\frac{24}{x}\right) \leqslant 4.$$

Пусть $x+\dfrac{24}{x}=t$. $(t+14)(t+11) \leqslant 4;$ $t^2+25t+150 \leqslant 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t=-10 \\ t=-15; \end{array}\right. \quad (t+10)(t+15) \leqslant 0.$$

$$\left(x+10+\frac{24}{x}\right)\left(x+15+\frac{24}{x}\right) \leqslant 0;$$

$$\frac{x^2+10x+24}{x} \cdot \frac{x^2+15x+24}{x} \leqslant 0.$$



Ответ: $\left[\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}; -6\right] \cup \left[-4; \dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}\right].$

3. $|x^4+x^3-7x^2-x+6| \leqslant |x^3+2x^2-5x-6|.$

Используя теорему Безу и учитывая тот факт, что $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ являются делителями числа 6, разложим на множители левую и правую части неравенства.

$|(x^2+2x-3)(x^2-x-2)| \leqslant |(x+1)(x^2+x-6)|.$

$|(x+3)(x-1)(x+1)(x-2)| \leqslant |(x+1)(x+3)(x-2)|;$

$|(x+3)(x+1)(x-2)|(|x-1|-1) \leqslant 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1, \\ x=2, \\ \begin{cases} x-1 \leqslant 1, \\ x-1 \geqslant -1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1, \\ x=2, \\ \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $[0;2] \cup \{-1;-3\}.$

4. $|x^2-5|x|+4|\geqslant|2x^2-3|x|+1|$.

$|(|x|-1)(|x|-4)|\geqslant|(|x|-1)(2|x|-1)|;$

$$\big||x|-1\big|\cdot\big(\big||x|-4\big|-\big|2|x|-1\big|\big)\geqslant 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}|x|=1\\ \big||x|-4\big|\geqslant\big|2|x|-1\big|;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1,\\ |x|-4\geqslant\big|2|x|-1\big|,\\ |x|-4\leqslant-\big|2|x|-1\big|;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1,\\ \left\{\begin{array}{l}2|x|-1\leqslant|x|-4,\\ 2|x|-1\geqslant 4-|x|\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2|x|-1\leqslant 4-|x|,\\ 2|x|-1\geqslant|x|-4;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

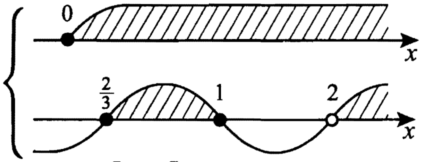
$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1,\\ \left\{\begin{array}{l}|x|\leqslant-3,\\ |x|\geqslant\dfrac{5}{3}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}|x|\leqslant\dfrac{5}{3},\\ |x|\geqslant-3;\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1,\\ \left\{\begin{array}{l}x\leqslant 1\dfrac{2}{3},\\ x\geqslant-1\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[-1\dfrac{2}{3};1\dfrac{2}{3}\right]$.

5. $\dfrac{(1+x)(x+2)}{x^2-|x|-2}\geqslant-3x$.

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ \dfrac{(1+x)(x+2)}{x^2-x-2}\geqslant-3x\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ \dfrac{(1+x)(x+2)}{x^2+x-2}\geqslant-3x;\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ \dfrac{x+2}{x-2}\geqslant-3x\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ \dfrac{x+1}{x-1}\geqslant-3x,\\ x\neq-2;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ \dfrac{3x^2-5x+2}{x-2}\geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ x\neq-2,\\ \dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}\geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ \dfrac{(3x-2)(x-1)}{x-2}\geqslant 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ x\neq-2,\\ x-1>0.\end{array}\right.\end{array}\right.$$



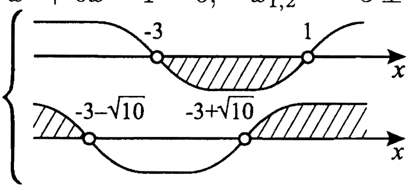
Ответ: $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

6. $|x^2 + 4x - 2| < 2x + 1$.

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 2 < 2x + 1, \\ x^2 + 4x - 2 > -2x - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^2 + 6x - 1 > 0. \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1; \end{array} \right.$$

$$x^2 + 6x - 1 = 0; \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}.$$



$(-3 + \sqrt{10}; 1)$.

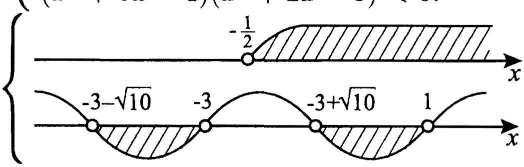
Другой способ: $|x^2 + 4x - 2| < 2x + 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ (|x^2 + 4x - 2|)^2 < (2x + 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ (x^2 + 4x - 2)^2 - (2x + 1)^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ (x^2 + 4x - 2 + 2x + 1)(x^2 + 4x - 2 - 2x - 1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ (x^2 + 6x - 1)(x^2 + 2x - 3) < 0. \end{cases}$$

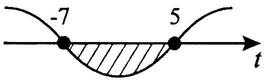


Ответ: $(-3 + \sqrt{10}; 1)$.

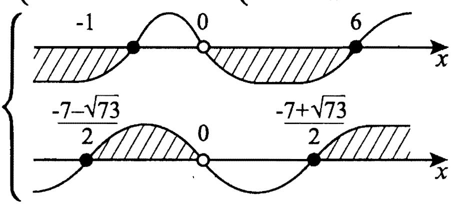
Решение зачетной карточки 8

1. $\left(x-\dfrac{6}{x}\right)^2+2\left(x-\dfrac{6}{x}\right)-35\leqslant 0.$

Пусть $x-\dfrac{6}{x}=t$. Тогда $t^2+2t-35\leqslant 0$; $(t+7)(t-5)\leqslant 0$.



$$\begin{cases} x-\dfrac{6}{x}\leqslant 5, \\ x-\dfrac{6}{x}\geqslant -7; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-5x-6}{x}\leqslant 0, \\ \dfrac{x^2+7x-6}{x}\geqslant 0. \end{cases}$$



Ответ: $\left[\dfrac{-7-\sqrt{73}}{2};-1\right]\cup\left[\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2};6\right]$.

2. $\left(\dfrac{2+5x}{24+34x-3x^2}-\dfrac{2+3x}{24+58x-5x^2}\right):\dfrac{4x+2}{4+16x+15x^2}\leqslant\dfrac{48}{12-x}.$

$24+34x-3x^2=-(3x+2)(x-12);$

$24+58x-5x^2=-(5x+2)(x-12);$

$15x^2+16x+4=(5x+2)(3x+2);$

$$\left(\frac{2+3x}{(5x+2)(x-12)}-\frac{2+5x}{(3x+2)(x-12)}\right)\frac{(5x+2)(3x+2)}{2(2x+1)}+\frac{48}{x-12}\leqslant 0;$$

$$\frac{(3x+2)^2-(2+5x)^2}{(5x+2)(x-12)(3x+2)}\cdot\frac{(5x+2)(3x+2)}{2(2x+1)}+\frac{48}{x-12}\leqslant 0;$$

$$\frac{(3x+2+2+5x)(3x+2-2-5x)(5x+2)(3x+2)}{2(5x+2)(3x+2)(x-12)(2x+1)}+\frac{48}{x-12}\leqslant 0;$$

$$\frac{-8x(2x+1)}{2(x-12)(2x+1)}+\frac{48}{x-12}\leqslant 0;$$

$$\frac{48}{x-12}-\frac{4x}{x-12}\leqslant 0;\quad \frac{-4(x-12)}{x-12}\leqslant 0;\quad -4\leqslant 0.$$

$$\begin{cases} x\neq 12,\\ x\neq -\dfrac{1}{2},\\ x\neq -\dfrac{2}{3},\\ x\neq -\dfrac{2}{5}.\end{cases}$$

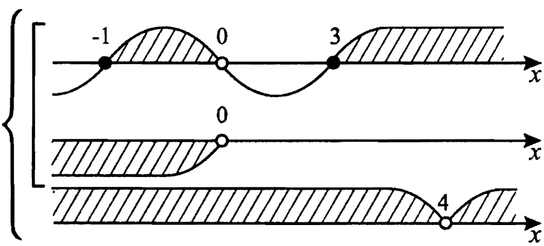
Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5};12\right)\cup$
$\cup(12;+\infty)$.

3. $\left|\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}\right|\geqslant\dfrac{3}{x}$.

$$\begin{cases} |x-2|\geqslant\dfrac{3}{x},\\ x\neq 4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x-2\geqslant\dfrac{3}{x}\\ x-2\leqslant-\dfrac{3}{x},\end{array}\right.\\ x\neq 4;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2x-3}{x}\geqslant 0\\ \dfrac{x^2-2x+3}{x}\leqslant 0,\end{array}\right.\\ x\neq 4;\end{cases}$$

$x^2-2x+3>0$ (при всех x); $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x}\geqslant 0\\ \dfrac{1}{x}\leqslant 0,\end{array}\right.\\ x\neq 4.\end{cases}$



Ответ: $(-\infty;0)\cup[3;4)\cup(4;+\infty)$.

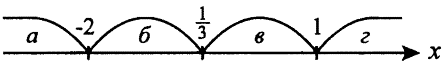
4. $(x+6)^4 + 2x^2(x+6)^2 \leqslant 35x^4.$

$$\left(\frac{x+6}{x}\right)^4 + 2\left(\frac{x+6}{x}\right)^2 - 35 \leqslant 0,$$

далее аналогично первому примеру.

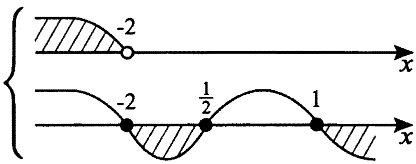
Ответ: $(-\infty; -1{,}5(\sqrt{5}-1)] \cup \left[\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1); +\infty\right)$.

5. $(|1-3x| - |x+2| - 2)(x^2 - x - 2|x-1|) \leqslant 0.$



а) $\begin{cases} x < -2, \\ (1-3x+x+2-2)(x^2-x+2(x-1)) \leqslant 0; \end{cases}$

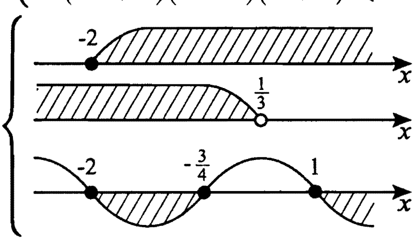
$\begin{cases} x < -2, \\ (1-2x)(x-1)(x+2) \leqslant 0; \end{cases}$



нет решений;

б) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < \dfrac{1}{3}, \\ (1-3x-x-2-2)(x^2-x+2(x-1)) \leqslant 0; \end{cases}$

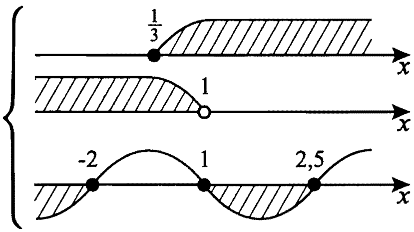
$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < \dfrac{1}{3}, \\ -(4x+3)(x-1)(x+2) \leqslant 0. \end{cases}$



$\left[-2; -\dfrac{3}{4}\right]$;

в) $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ x < 1, \\ (3x - 1 - x - 2 - 2)(x^2 - x + 2(x - 1)) \leqslant 0; \end{cases}$

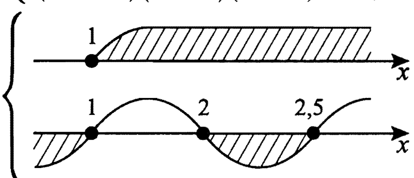
$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ x < 1, \\ (2x - 5)(x - 1)(x + 2) \leqslant 0; \end{cases}$



нет решений;

г) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (3x - 1 - x - 2 - 2)(x^2 - x - 2(x - 1)) \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ (2x - 5)(x - 1)(x - 2) \leqslant 0; \end{cases}$



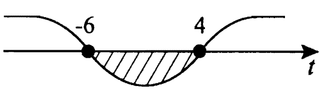
$[2; 2{,}5] \cup \{1\}$.

Ответ: $\left[-2; -\dfrac{3}{4}\right] \cup \{1\} \cup [2; 2{,}5]$.

6. $|(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)| \leqslant 24$.

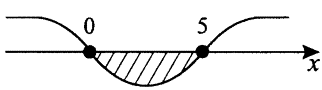
Пусть $x^2 - 5x + 4 = t$; $\quad |(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)| \leqslant 24$;

$|t(t + 2)| \leqslant 24$; $\quad \begin{cases} t^2 + 2t - 24 \leqslant 0, \\ t^2 + 2t + 24 \geqslant 0; \end{cases} \quad (t + 6)(t - 4) \leqslant 0$.



$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant -6, \\ x^2 - 5x + 4 \leqslant 4; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 5x + 10 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x \leqslant 0. \end{cases}$



Ответ: $[0; 5]$.

Ответы на самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $(-\infty;-1)\cup[2;3)\cup[5;\infty)$; **2.** $[-5;-4)\cup(2;3]$;
3. $(-1,5;0,6)\cup(1;\infty)$; **4.** $(-\infty;-2)\cup(6;\infty)\cup\{4\}$;
5. $(-\infty;-6]\cup[0;1)$; **6.** $[-3;-2]\cup(-1;0)\cup(1;2]$;
7. $[0;2]\cup(3;\infty)$; **8.** $[-9;-2)\cup(-2;3)$;
9. $(-\infty;-5]\cup(-2;1]$; **10.** $[0;1)\cup(3;4]$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-5]\cup(-3;-2]\cup(1;\infty)$; **2.** $[-3;-2)\cup(4;5]$;
3. $(-\infty;-1)\cup(-0,6;1,5)$; **4.** $(-\infty;-6)\cup(2;\infty)\cup\{-4\}$;
5. $(-1;0]\cup[6;\infty)$; **6.** $[-2;-1)\cup(0;1)\cup[2;3]$;
7. $(-\infty;-3)\cup[-2;0]$; **8.** $(-3;2)\cup(2;9]$;
9. $[-1;2)\cup[5;\infty)$; **10.** $[-4;-3)\cup(-1;0]$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $(-6;7)$; **2.** $[-3;-1)\cup(0;1)\cup\{2\}$; **3.** $(-\infty;1)\cup(1;2)$;
4. $(-\infty;-2]\cup(0;2)\cup[4;\infty)$; **5.** $(-\infty;-1)\cup[0;3]\cup(4;\infty)$;
6. $(-4;-3)\cup[-2,5;\infty)$; **7.** $[-8;-2)\cup(-2;0]$;
8. $(-\infty;-2)\cup\left[-\dfrac{2}{11};2\right)$; **9.** $(-2;-1)\cup[1,5;2)$;
10. $(-\infty;-2]\cup(0;1)\cup[3;\infty)$.

Вариант 2

1. $(-7;6)$; **2.** $(-1;0)\cup(1;3]\cup\{-2\}$;
3. $(-2;-1)\cup(-1;\infty)$; **4.** $(-\infty;-4]\cup(-2;0)\cup[2;\infty)$;
5. $(-\infty;-4)\cup[-3;0]\cup(1;\infty)$; **6.** $(-\infty;2,5]\cup(3;4)$;
7. $[0;2)\cup(2;8]$; **8.** $\left(-2;\dfrac{2}{11}\right]\cup(2;\infty)$;
9. $(-2;-1,5]\cup(1;2)$; **10.** $(-\infty;-3]\cup(-1;0)\cup[2;\infty)$.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $(3;5)$; **2.** $(-\infty;\infty)$; **3.** $(-\infty;-4]\cup[1;\infty)$;
4. $\{-7;1\}$; **5.** $[-0,6;5]$; **6.** $[-3;-2)\cup(-2;1)\cup(1;\infty)$;
7. $(2;3)\cup\{-3;4\}$; **8.** $(2;3]$; **9.** $\{-1\}$;
10. $[-1;0)\cup(0;0,5)\cup(0,5;1,5]$.

Вариант 2

1. $(-5;-3)$; **2.** $(-\infty;\infty)$; **3.** $(-\infty;-1]\cup[4;\infty)$;
4. $\{-1;7\}$; **5.** $[-5;0,6]$; **6.** $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;3]$;
7. $(-3;-2)\cup\{-4;3\}$; **8.** $[-3;-2)$; **9.** $\{1\}$;
10. $[-1,5;-0;5)\cup(-0,5;0)\cup(0;1]$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. $(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};1\frac{1}{3}\right)\cup(3;\infty)$; **2.** $\left[-\frac{1}{4};1\right]$;
3. $(-\infty;-2]\cup\left[1\frac{2}{3};\infty\right)$; **4.** $(-\infty;-3]\cup(-2;1)\cup[5;\infty)$;
5. $(-2;-1]\cup[2;\infty)$; **6.** $\left(-5;-1\frac{7}{8}\right)\cup(5;\infty)$;
7. $(-\infty;-3)\cup[1;1,5)\cup\{0,5\}$; **8.** $(-1;0]\cup[3;4)\cup\{5\}$;
9. $(-\infty;-4)\cup(3;\infty)\cup\{-3\}$;
10. $(-\infty;-1)\cup\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(1;\infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3)\cup\left(-1\frac{1}{3};\sqrt{2}\right)\cup(2;\infty)$; **2.** $\left[-1;\frac{1}{4}\right]$;
3. $\left(-\infty;-1\frac{2}{3}\right]\cup[2;\infty)$; **4.** $(-\infty;-5]\cup(-1;2)\cup[3;\infty)$;
5. $(-\infty;-2]\cup[1;2)$; **6.** $(-\infty;-5)\cup\left(1\frac{7}{8};5\right)$;
7. $(-\infty;-2)\cup\left[\frac{1}{2};2,5\right)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$; **8.** $(-4;-3]\cup[0;1)\cup\{-5\}$;
9. $(-\infty;-3)\cup(4;\infty)\cup\{3\}$;
10. $(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right]\cup(1;\infty)$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $(-\infty;-4)\cup\left(\sqrt{3};1,75\right)\cup(2;\infty)$; **2.** $[-2;2]$;

3. $(-2,5;-2]\cup\left[2;2\frac{1}{3}\right)$; **4.** $(-1;6)$; **5.** $(-2;2)$;

6. $(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup\left[-\frac{1}{4};2\right]\cup\left\{-\frac{1}{3}\right\}$;

7. $(-\infty;1]\cup(1,5;\infty)$;

8. $(-\infty;-3)\cup[0;2)\cup[12;\infty)$; **9.** $(-\infty;-1)\cup(6;\infty)\cup\{0;4\}$;

10. $(-\infty;-2]\cup[1;2)\cup(2;3)\cup(6;\infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3)\cup\left(\sqrt{6};2,5\right)\cup(4;\infty)$; **2.** $[-3;3]$;

3. $\left[-2\frac{1}{3};-2\right)\cup[2;2,5)$; **4.** $(-6;1)$; **5.** $(-1;0)\cup(0;1)$;

6. $(-\infty;-4)\cup(-4;-3]\cup\left[\frac{1}{3};3\right]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$;

7. $(-\infty;-1,5)\cup[-1;\infty)$;

8. $[-12;-2)\cup[0;3)$; **9.** $(-\infty;-6)\cup(1;\infty)\cup\{-4;0\}$;

10. $(-\infty;-6)\cup(-3;-2)\cup[-2;-1]\cup(2;\infty)$.

Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1. $(-5;0]\cup[3;8)$; **2.** $(-\infty;1)\cup\left(1;1\frac{2}{3}\right)\cup[2;3]$;

3. $\left(-\infty;-\sqrt{1,5}\right)\cup\left(1;\sqrt{1,5}\right)$;

4. $(-\infty;-2,5]\cup(-1,5;-1,25)\cup(-1,25;-1]$;

5. $(-\infty;-1)\cup(-1;1]\cup(2,5;\infty)$; **6.** $(-\infty;-6]\cup[6;\infty)$;

7. $(-\infty;-1]$; **8.** $(-4;0)\cup(0;1)\cup(1;4)$;

9. $(-4;-1,5)\cup[-0,25;0,25]\cup(1,5;4)$;

10. $[-6;-3]\cup[-2;2]\cup[3;6]$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-1)\cup[0;4]\cup(5;\infty)$;

2. $[-3;2]\cup\left(-1\frac{2}{3};-1\right)\cup(-1;\infty)$;

3. $(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\cup\left(1;\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$;

4. $[1;1,25)\cup(1,25;1,5)\cup[2,5;\infty)$;

5. $(-\infty;-2,5)\cup[-1;1)\cup(1;\infty)$;

6. $(-\infty;-5]\cup[5;\infty)$; **7.** $[-\infty;-2)$;

8. $(-3;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$;

9. $\left(-3;-1\frac{1}{3}\right)\cup\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup\left(1\frac{1}{3};3\right)$;

10. $\left[-2-\sqrt{7};-3\right]\cup[-1;1]\cup\left[3;2+\sqrt{7}\right]$.

Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1. $(-\infty;-1]\cup[1;2)\cup(3;\infty)$;

2. $[-2;-1)\cup\left(-\frac{11}{19};\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{2};2\frac{1}{2}\right)$;

3. $(-\infty;-1]\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup[1;2]$;

4. $\left[-1;-\frac{4}{5}\right)\cup\left(-\frac{4}{5};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{6};\infty\right)$;

5. $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{5}{13};1\right)\cup(2;\infty)$;

6. $\left(-\infty;-2\frac{2}{3}\right]\cup[0;1,5]$;

7. $(-\infty;-2]\cup\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;\infty)$;

8. $[-5;-2)\cup\left[\frac{1}{3};3\right)$;

9. $[0;2)\cup\left(4;3+\sqrt{5}\right]$;

10. $(-\infty;-1)\cup(-1;1]\cup[3;5)\cup(5;\infty)$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3)\cup(-2;-1]\cup[1;\infty)$;

2. $\left(-2\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{11}{13}\right]\cup(1;2)$;

3. $[-2;-1]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup[1;\infty)$; **4.** $\left(\infty;\frac{1}{6}\right]\cup\left(\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};1\right]$;

5. $(-\infty;-2)\cup\left(-1;-\frac{5}{13}\right]\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(1;\infty)$;

6. $[-2;0]\cup[2,5;\infty)$; **7.** $(-\infty;-2)\cup\left[-1;-\frac{1}{2}\right]\cup(2;\infty)$;

8. $\left(-3;-\frac{1}{3}\right]\cup(2;5]$; **9.** $\left[-\left(3+\sqrt{5}\right);-4\right)\cup(-2;0]$;

10. $(-\infty;-5)\cup(-5;-3]\cup[-1;1)\cup(1;\infty)$.

Самостоятельная работа 8

Вариант 1

1. $\left(-2\frac{1}{3};-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)\cup(3;\infty)$; **2.** $(-3;2)$;

3. $(-4;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$; **4.** $(-7;-3]\cup[0;1)\cup(1;3]\cup\{4\}$;

5. $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\cup\{1\}$; **6.** $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$;

7. $\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$;

8. $(-5;-3]\cup[-2;-1)\cup(0,5;1]$; **9.** $[-2;0)\cup(1;3]$;

10. $(-\infty;-0,5)\cup(0,5;1,5]\cup\{0\}$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};2\frac{1}{3}\right)$; **2.** $(-2;3)$;

3. $(-1;-0,5)\cup(-0,5;0,5)\cup(1;2)$;

4. $[-3;-1)\cup(-1;0]\cup[3;7)\cup\{-4\}$;

5. $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)\cup\{-1\}$;

6. $[-1;-0,5)\cup(-0,5;0,5)\cup(0,5;1]$;

7. $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1+\sqrt{2};\infty\right)$;

8. $[-1;-0,5)\cup(1;2]\cup[3;5)$; **9.** $[-3;-1)\cup(0;2]$;

10. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Самостоятельная работа 9

Вариант 1

1. $[-1,5;2]$; **2.** $\emptyset$ **3.** $[-9;0]\cup\{2\}$;
4. $\left[-3\frac{1}{21};-3\right)\cup(5;\infty)$; **5.** $(-2;-1,4]\cup(1;3]$; **6.** $x=1$;
7. $(0;1]\cup[1,5;2)$; **8.** $(-1;0]\cup(1;3]$;
9. $(-1,5;-1)\cup(0;1,5]\cup[2;3)\cup(4;\infty)$; **10.** $[-\sqrt{2};-1)$.

Вариант 2

1. $[-2;1,5]$; **2.** $\emptyset$; **3.** $[0;9]\cup\{-2\}$;
4. $(-\infty;-5)\cup\left(3;3\frac{1}{21}\right]$; **5.** $[-3;-1)\cup[1,4;2)$; **6.** $\{-1\}$;
7. $(-2;-1,5]\cup[-1;0)$; **8.** $[-3;-1)\cup[0;1)$;
9. $(-\infty;-4)\cup(-3;-2]\cup[-1,5;0)\cup(1;1,5)$; **10.** $(1;\sqrt{2}]$.

Самостоятельная работа 10

Вариант 1

1. $(-1;-0,5)\cup(-0,5;0,5]\cup[2;\infty)$;
2. $(-\infty;-2)\cup(-1;0]\cup(1;2)$; **3.** $(-\infty;1]\cup[2;3]\cup[4;\infty)$;
4. $(0,25;8)$; **5.** $(-0,5;-0,25)\cup(1;1,25)$; **6.** $[-0,5;0,5]$;
7. $[-3;1]$; **8.** $(-\infty;-1)\cup(1;5]$;
9. $(-4;-3)\cup(-2,5;-2)\cup(-1;0)$; **10.** $(-1;2)$.

Вариант 2

1. $(-\infty;-2]\cup[-0,5;0,5)\cup(0,5;1)$;
2. $(-2;-1)\cup[0;1)\cup(2;\infty)$; **3.** $(-\infty;-4]\cup[-3;-2]\cup[-1;\infty)$;
4. $(-8;-0,25)$; **5.** $(-1,25;-1)\cup(0,25;0,5)$;
6. $[-0,25;0,25]$; **7.** $[-1;3]$; **8.** $[-5;-1)\cup(1;\infty)$;
9. $[0;1)\cup(2;2,5]\cup(3;4)$; **10.** $(-2;1)$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Научный редактор серии А. В. Семенов
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru,

Подписано к печати 14.05.2008. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 15,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ 543.

Отпечатано с диапозитивов в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34